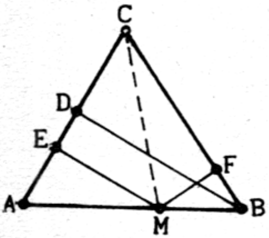
Драгољуб Милошевиќ
П р а њ а н и

ДОКАЗ НА НЕКОИ ТЕОРЕМИ СО СПОРЕДУВАЊЕ НА ПЛОШТИНИ

Овде сакаме на неколку примери да покажеме како можат да се докажат некои теореми со споредување на плоштини на геометриските фигури.

Пример 1. Збирот од нормалите спуштени од која било точка на основата на рамнокракиот триаголник до неговите краци е постојан и еднаков на висините што им одговараат на краците.

Доказ: Нека е M произволна точка од основата AB на триаголникот ABC (црт. 1), ME и MF нормали кон краците и BD висина кон кракот AC на тој тиаголник. Бидејќи плоштината на ΔABC е еднаква на збирот од плоштините на ΔAMC и ΔMBC, имаме $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{ME}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{MF}}{2}$.



Црт. 1

Излегува дека $\overline{BD}=\overline{ME}+\overline{MF}$ што требаше да се докаже.

Пример 2. Симетралата на внатрешниот агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови што се пропорционални со останатите две страни.

Доказ. Нека A, B и C се темиња на триаголникот. Нека симетралата на аголот при темето A ја сече страната BC во точката D (црт. 2). Од точката D ги спуштаме нормалите DM и DN соодветно на страните AC и AB. Плоштината на ΔACD е еднаква на $\frac{\overline{CD}\cdot\overline{AA_1}}{2}$, каде што AA_1 претставува растојание помеѓу точката A и отсечката CD. Исто така плоштината на овој триаголник е еднаква на $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DM}}{2}$, биде}ќи имаме дека $\dfrac{\overline{CD}\cdot\overline{AA_1}}{2} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{DM}}{2}$, па следува дека е

$$\overline{AC}:\overline{CD} = \overline{AA_1}:\overline{DM}. \qquad (1)$$

На ист начин за ΔABD имаме: (за ΔABD):$(BD:AA_1):2$ =

$= \dfrac{\overline{BD}\cdot\overline{AA_1}}{2} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{DN}}{2}$, т.е.

$$\overline{BD}:\overline{AB} = \overline{DN}:\overline{AA_1}. \qquad (2)$$

Врз основа на својството на симетралата на аголот, секоја нејзина точка да е подеднакво оддалечена од краците, имаме:

$$\overline{DM} = \overline{DN}. \qquad (3)$$

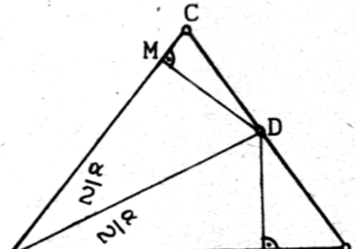
Од равенствата (2) и (3) имаме:

$$\overline{BD}:\overline{AB} = \overline{DM}:\overline{AA_1}. \qquad (4)$$

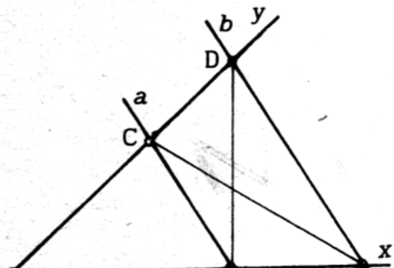
Од равенствата (1) и (4) имаме: $\overline{AC}:\overline{CD} = \overline{AB}:\overline{BD}$ или

$$\overline{CD}:\overline{BD} = \overline{AC}:\overline{AB},$$

што требаше да се докаже.



Црт. 2



Црт. 3

Пример 3. (Талесова теорема) Ако краците на даден агол се пресечат со паралелни прави, добиените отсечки на едниот крак се пропорционални со соодветните отсечки на другиот крак т.е. $\overline{OA}:\overline{AB} = \overline{OC}:\overline{CD}$. (црт.3).

Доказ. Со P_1 да ја означиме плоштината на $\triangle OAC$, со P_2 на $\triangle ABC$ и со P_3 плоштината на $\triangle ADC$. Важат равенствата:

$$P_2 = \frac{1}{2}AC \cdot d \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{1}{2}AC \cdot d,$$

каде што d е растојание од точката B до правата a, или, исто така, растојание од точките D до правата a (бидејќи a е паралелна со b). Значи, имаме $P_2 = P_3$ па, според тоа,

$$P_1 : P_2 = P_1 : P_3 \tag{5}$$

Понатаму, исто така важат и равнствата:

$$P_1 = \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot h, \quad P_2 = \frac{1}{2}AB \cdot h,$$

$$P_1 = \frac{1}{2}OC \cdot p \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{1}{2}CD \cdot p, \tag{6}$$

каде што h е растојание од точката C до кракот Ox, а p растојание од точката A до кракот Oy.

Од релациите (5) и (6) добиваме:

$$(\overline{OA} \cdot h) : (\overline{AB} \cdot h) = (\overline{OC} \cdot p) : (\overline{CD} \cdot p),$$

од каде што имаме:

$$\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD}$$

Задачи:

1. Ако во правоаголниот триаголник еден агол е 15°, тогаш радиусот на опишаната кружница е еднаков на геометриската средина од катетата, т.е. $R = \sqrt{ab}$. Докажи!.

2. Ако a, b и c се страни (c е хипотенуза) и h висина кон хипотенузата на правоаголниот триаголник, тогаш важи равенството:

$$a+b < c+h$$

Докажи!

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус