Стастијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1996/97 година

ДВЕ ФУНКЦИЈЕ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Ратко Тошић, Нови Сад

У овом чланку обрадићемо две једноставне функције теорије бројева и илустроваћемо њихову примену у решавању задатака. Неки од задатака, које ћемо формулисати у овом чланку, предлагани су на разним домаћим и међународним такмичењима из математике.

1. Функција $\lfloor x \rfloor$

За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x. Функција $\lfloor x \rfloor$ назива се *цео део од* x или *највеће цело од* x. Тако је, на пример, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$, $\lfloor -3,3 \rfloor = -4$.

Слично, са $\lceil x \rceil$ означавамо *најмање цело* тј. најмањи цео број који није мањи од x. Тако је, на пример, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2,9 \rceil = 3$, $\lceil -3,3 \rceil = -3$. Лако се види да је $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$, ако је x цео број и $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, ако x није цео број. Ради концизности, уводимо и ознаку: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Кажемо да је $\{x\}$ *разломљени део од* x. Очигледно је $0 \leq \{x\} < 1$.

Следећа теорема указује на једну примену функције $\lfloor x \rfloor$ у теорији бројева.

ТЕОРЕМА 1 *(а) Нека је x произвољан реалан и m природан број. Тада је $\lfloor \lfloor x \rfloor / m \rfloor = \lfloor x/m \rfloor$.*

(б) Ако је n природан број, онда је број природних бројева дељивих са n а који нису већи од датог броја x једнак $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$.

ДОКАЗ (а) Број x може да се напише у облику $x = mq + r + \{x\}$, где су q и r цели бројеви и $0 \leq r < m$. Зато је

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r + \{x\}}{m} \right\rfloor = q, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor = q,$$

јер је $0 \leq \frac{r}{m} < 1$ и $0 \leq \frac{r+\{x\}}{m} < 1$.

(б) Бројеви дељиви са n су: n, $2n$, $3n$, $\ldots$ Нека је kn највећи број дељив са n, такав да је $kn \leq x$. Тада је $kn \leq x < (k+1)n$, тј. $k \leq \frac{x}{n} < k+1$; дакле, $k = \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$. $\square$

Задаци

1. *Да ли постоји природан број m такав да је $\lfloor 12,4m \rfloor = 87$?*
2. *Наћи све реалне бројеве чији логаритми имају карактеристику k.*
3. *Колико има природних бројева између 10^6 и 10^7, који су дељиви са 1995?*
4. *Колико има природних бројева не већих од 1000000, који нису дељиви ни са 5 ни са 7?*
5. *Одредити број природних бројева мањих од 1000, узајамно простих са 36.*

2. Функција $E_m(n)$

Друга функција коју ћемо разматрати у овом чланку је функција $E_m(n)$, где за дате природне бројеве m и n, $E_m(n)$ означава највећи природан број α такав да је $m^\alpha | n$. Следећа теорема истиче једно важно својство те функције. (Са $n!$ означавамо производ свих природних бројева од 1 до n.)

ТЕОРЕМА 2 *Нека је n природан и p прост број. Тада је $E_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \cdots + \lfloor n/p^k \rfloor$, где је k највећи природан број за који је $\lfloor n/p^k \rfloor > 0$.*

ДОКАЗ На основу Теореме 1(б), међу природним бројевима не већим од n, има $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ бројева дељивих са p. То су бројеви $p, 2p, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor p$. Зато је

$$n! = p \cdot 2p \cdot 3p \cdots \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor p \cdot N_1 = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor ! \cdot N_1,$$

где је N_1 природан број који није дељив са p. Примењујући исто разматрање за број $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor !$ и узимајући да је $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^{i+1}} \right\rfloor$ (Теорема 1(а)), добијамо да је

$$n! = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \cdot p^{\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor ! \cdot N_2,$$

где је N_2 број који није дељив са p. Поступак се понавља $k+1$ пута, где је $k+1$ најмањи природан број за који је $\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = 0$. На тај начин добијамо да је

$$\begin{aligned} n! &= p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \cdot p^{\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor} \cdots p^{\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor} \cdot p^{\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor ! \cdot N_{k+1} \\ &= p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor ! \cdot N_{k+1}, \end{aligned}$$

где је N_{k+1} број који није дељив са p. Како је $\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = 0$ и $0! = 1$, тражени број је $E_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \cdots + \left\lfloor n/p^k \right\rfloor$. □

Директна последица Теореме 2 је следеће тврђење:

ПОСЛЕДИЦА 2а *Ако су p и q прости бројеви и $p < q$, онда је $E_p(n!) \geq E_q(n!)$.*

ДОКАЗ Следи на основу чињенице да је, за произвољан природан број k, $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{q^k} \rfloor$. □

Задаци

6. *Нека је $m = p_1 p_2 \cdots p_k$, где су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ прости бројеви и $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Доказати да је $E_m(n!) = E_{p_k}(n!)$.*

7. *Са колико се нула завршава број 1995! ?*

8. *Да ли постоји природан број n такав да се број $n!$ завршава са тачно 30 нула?*

9. *Одредити све природне бројеве n такве да се број $n!$ завршава са тачно 1995 нула.*

10. *Одредити највећи природан број α, такав да је $1001^\alpha | 1995!$.*

11. *Да ли постоји природан број n такав да је 3^{200} максимални степен тројке који је делитељ од $n!$?*

12. *Одредити највећи природан број α за који је $12^\alpha | 500!$.*

13. *Нека је природан број n написан у систему са основом p, где је p прост број: $n = a_s p^s + a_{s-1} p^{s-1} + \cdots + a_1 p + a_0$. Доказати да је*

$$E_p(n!) = \frac{n - \sum_{i=0}^{s} a_i}{p-1}.$$

14. *Запис природног броја n у бинарном систему садржи r јединица. Доказати да је 2^{n-r} највиши степен двојке који је делитељ од $n!$.*

15. *Доказати да је $\alpha = \frac{1}{2} 3^r - 2r - 1$ највећи природан број α за који је $3^\alpha | (3^r - 2)!$.*

16. *Одредити највећи природан број α за који је $5^\alpha | (5^r - 1)!$.*