2-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2006 год

Задача №1. Найдите все натуральные числа n такие, что $n = \varphi(n) + 402$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера (известно, что если $p_1, \ldots, p_k$ - все различные простые делители натурального числа n, то $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$; кроме того, $\varphi(1) = 1$).

Задача №2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки K и L соответственно, так, что $BK = CL$. Пусть P - точка пересечения отрезков BL и CK, а M - точка внутри отрезка AC такая, что прямая MP параллельна биссектрисе угла $\angle BAC$. Докажите, что $CM = AB$.

Задача №3. Прямоугольную таблицу $m \times n$ $(4 \leq m \leq n)$ назовем *хорошей*, если в каждую ее клетку можно вписать число 0 или 1 так, чтобы одновременно выполнялись условия:

1) не все вписанные числа равны 0 и не все равны 1;
2) число единиц во всех квадратах 3×3 одно и то же;
3) число единиц во всех квадратах 4×4 одно и то же.

Найдите все пары натуральных чисел (m, n) $(4 \leq m \leq n)$, для которых существует хорошая таблица $m \times n$.

Задача №4. Имеется куча из 100 камней. Разбиение этой кучи на k новых куч назовем *особым*, если, во-первых, количества камней в разных кучах разные, и, во-вторых, при любом дальнейшем разбиении любой из этих куч на две новые среди новых $k + 1$ куч полученного разбиения найдутся две кучи с одинаковым числом камней (любая куча состоит, по крайней мере, из одного камня).

а) Найдите наибольшее число k, при котором для данной кучи из 100 камней существует особое разбиение на k куч.

б) Найдите наименьшее число k, при котором существует особое разбиение данной кучи на k куч.

Задача №5. Докажите, что если сумма действительных чисел a, b, c, d равна нулю, то для них выполняется неравенство

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 12 \geq 6(abc + abd + acd + bcd).$$

Задача №6. Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что $AD = BC + EF$, $BE = AF + CD$, $CF = DE + AB$. Докажите, что

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CD}{AF} = \frac{EF}{BC}.$$