Др Павле Младеновић (Београд)

НЕКОЛИКО МАТЕМАТИЧКИХ ИГАРА

Прва игра. *Играчи A и B играју следећу игру. Прво играч A поставља скакача (шаховску фигуру) на произвољно поље шаховске табле, а затим играчи наизменично померају тог скакача по правилима шаховске игре. Игру губи онај играч који постави скакача на поље на које се скакач већ налазио пре тога. Који играч може победити у овој игри независно од игре његовог противника, ако се игра на табли:*

(а) 8×8, (б) 9×9.

Решење. (а) На сл. 1 показано је како се поља шаховске табле 8×8 могу груписати у парове, тако да са произвољног поља те табле скакач може доћи на поље које се са њим налази у истом пару. (Поља која чине пар означена су истим бројем.) Играч B може победити у овој игри независно од потеза које вуче играч A. Победничка стратегија за играча B је да у сваком потезу поставља скакача на оно поље које се налази у пару са пољем на које је први играч поставио скакача у претходном потезу.

14	11	24	5	15	10	23	4
25	5	15	10	24	4	16	9
11	14	32	26	29	28	3	23
6	25	29	27	31	26	9	16
13	12	19	32	28	30	22	3
20	6	13	30	27	31	17	8
12	19	1	21	7	18	2	22
1	20	7	18	2	21	8	17

Сл. 1

2	10	23	17	3	11	24	18	4
23	16	3	10	24	17	4	11	25
9	2	29	33	38	36	30	5	18
16	22	38	35	30	33	39	25	12
1	9	32	29	39	31	36	19	5
22	15	35	37	32	40	34	12	26
8	1	28	40	34	37	31	6	19
15	21	8	27	14	20	7	26	13
	28	14	21	7	27	13	20	6

Сл. 2

(б) На сл. 2 показано је како поља шаховске табле 9×9 можемо груписати у 80 парова, при чему је једно поље остало слободно, тако да за поља која су у истом пару важи исти услов као под (а). У овом случају играч A може победити независно од начина играња играча B. Победничка стратегија за играча A је следећа: У првом потезу играч A поставља скакача на слободно поље, тј. поље које није у пару ни са једним другим пољем (на сл. 2 то поље није нумерисано бројем). Затим играч A поступа аналогно као играч B у претходном случају.

Друга игра. *Два играча играју следећу игру: први играч записује једну цифру; затим други дописује са леве или десне стране другу цифру; затим први дописује са леве или десне стране трећу цифру; затим други дописује са леве или десне стране четврту цифру итд. Доказати да први играч може играти тако да никад после потеза другог играча записани број није потпун квадрат.*

Решење. Приметимо да важе следећа три једноставна тврђења:

(а) Ниједна од цифара 7 и 8 не може бити последња цифра потпуног квадрата.

(б) Двоцифрен број који почиње цифром 7 није потпун квадрат.

(в) Разлика квадрата два узастопна природна броја од којих ниједан није једноцифрен већа је од 20.

Прва два од наведених тврђења се лако проверавају. Треће тврђење доказујемо на следећи начин: ако је $n \geq 10$, онда је

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \geq 2 \cdot 10 + 1 \geq 21.$$

Сада покажимо како први играч може играти да би сигурно остварио свој циљ. У првом кораку он записује цифру 7. Због тврђења (а) и (б) други играч не може записати цифру ни са леве ни са десне стране тако да добије двоцифрен број који је потпун квадрат. У даљем току игре, први играч може поступити на следећи начин: претпоставимо да је већ записан број $\overline{c_1c_2\ldots c_k}$ и да је на потезу први играч. Размотримо следећих 20 бројева:

$$\overline{c_1c_2\ldots c_k70}, \quad \overline{c_1c_2\ldots c_k71}, \quad \overline{c_1c_2\ldots c_k72}, \quad \ldots, \quad \overline{c_1c_2\ldots c_k89}.$$

Због тврђења (в) међу тих 20 бројева постоји највише један који је потпун квадрат. Ако тај потпун квадрат има на претпоследњем месту цифру 7, онда први играч броју $\overline{c_1c_2\ldots c_k}$ дописује са десне стране цифру 8, а ако тај потпун квадрат има на претпоследњем месту цифру 8, онда први играч дописује са десне стране броју $\overline{c_1c_2\ldots c_k}$ цифру 7. Ако ниједан од уочених двадесет бројева није потпун квадрат, онда први играч дописује са десне стране броју $\overline{c_1c_2\ldots c_k}$ били коју од цифара 7 или 8. На тај начин спречава другог играча да записивањем следеће цифре направи потпун квадрат.

Трећа игра. *Поља правоугаоне таблице* 1×10 *нумерисана су редом бројевима* $1, 2, \ldots, 10$. *На пољима* $8, 9, 10$ *постављен је по један жетон, сл.* 3. *Два играча играју игру у којима наизменично повлаче потезе, а у сваком потезу дозвољено је преместити произвољан жетон на било које слободно поље које је нумерисано мањим бројем. Игру губи играч који не може одиграти потез. Доказати да играч који почиње игру може победити независно од потеза његовог противника.*

							•	•	•

Сл. 3

Решење. Први играч побеђује у овој игри на следећи начин: У првом потезу премешта жетон са поља 10 на поље 1, а остала поља групише у парове као на сл. 4 (поља истог пара нумерисана су истим бројем):

•	1	1	2	2	3	3	•	•	

Сл. 4

После тога први играч поступа на следећи начин: кад год други играч постави један од два суседна жетона на неко поље, он постави други од тих жетона на поље које се налази са њим у пару. На тај начин опет добија два жетона на суседним пољима, при чему је растојање између њих и првог поља паран број празних поља (може бити нула). Описана стратегија је победничка за првог играча.

А шта би било да је, на пример, број поља у почетној позицији био 11 и да су жетони постављени на поља 9, 10 и 11, сл. 5

								•	•	•

Сл. 5

У овом случају први играч би у првом потезу преместио жетон са поља 9 на поље 1 и поља од другог до деветог груписао у парове као на сл. 6: После тога би, наравно, поступао као у претходном случају.

•	1	1	2	2	3	3	4	4	•	•

Сл. 6

Приметимо још да бројеви 10 и 11 нису битни. Наиме важи и општије тврђење: ако је дата табла $1 \times n$ и ако су на последња три поља постављени жетони, онда, играјући слично као у наведеним случајевима у игри са датим правилима, увек побеђује први играч.

Четврта игра. *На урамљеној квадратној табли* 4×4 *постављено је* 15 *квадратних плочица димензије* 1×1, *које су нумерисане бројевима* 1, 2, 3, …, 15. *Једно поље је остало слободно. Квадратне плочице се могу померати, тако да се у сваком потезу на слободно поље премести плочица са суседног поља (два поља су суседна ако имају заједничку страницу). Сваки распоред плочица на табли називамо позицијом. Да ли је могућно полазећи од позиције на сл.* 7 *добити позицију на сл.* 8?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Сл. 7

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Сл. 8

Пре него што дамо одговор на постављено питање, увешћемо један појам који се тиче распореда елемената коначног скупа. Нека је дат скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$. Произвољан распоред елемената тог скупа у низ назива се *пермутација* тог скупа. На пример,

$$(1,2,3,4,5), \quad (3,1,2,5,4), \quad (5,4,3,2,1),$$

су три пермутације скупа $\{1,2,3,4,5\}$. У свакој пермутацији можемо пребројати колико пута се већи број појављује пре мањег. Сваку такву појаву називамо *инверзијом*. Тако, број инверзија пермутације $(1,2,3,4,5)$ једнак је 0, број инверзија пермутације $(3,1,2,5,4)$ једнак је 3 (број 3 стоји пре 1 и пре 2, број 5 стоји пре 4), а број инверзија пермутације $(5,4,3,2,1)$ једнак је 10 (број 5 је пре 4, 3, 2, 1; број 4 је пре 3, 2, 1; број 3 је пре 2, 1; број 2 је пре 1).

Ако је број инверзија неке пермутације паран, онда се та пермутација назива *парном*, а ако је број инверзија пермутације непаран, онда се та пермутација назива *непарном*. На пример, пермутације $(1,2,3,4,5)$ и $(5,4,3,2,1)$ су парне, а пермутација $(3,1,2,5,4)$ је непарна.

Размотримо још како се мења број инверзија пермутације када два елемента замене места. Ако два суседна елемента у пермутацији замене места, онда се број инверзија или смањи за 1 или повећа за 1. У сваком случају мења се парност пермутације. Ако је она била парна, после замене места суседним елементима постала је непарна и обрнуто. Претпоставимо сада да места замењују елементи који стоје на местима k и $k+m$. Ту замену места можемо остварити мењајући неколико пута места суседним елементима. Прво елементу који стоји на месту k мењамо место редом са елементима кој стоје на местима

$$k+1, \quad k+2, \quad \ldots, k+m-1, \quad k+m.$$

То је укупно m замена места суседним елеметима. При томе, елемент који је био на месту $k+m$ дошао је на место $k+m-1$. Затим том елементу редом замењујемо место са елементима који стоје на местима

$$k+m-2, \quad k+m-3, \quad \ldots, \quad k+1, \quad k.$$

То је још $m-1$ замена места суседним елементима. Према томе, елементима који стоје на местима k и $k+m$, можемо заменити места вршећи $2m-1$ пута замену места суседним елементима. Пошто је број замена места суседним елементима непаран, то се парност пермутације променила. Према томе, можемо формулисати следеће тврђење: *Ако у пермутацији произвољног скупа замене места два елемента, онда се мења парност те пермутације.*

Вратимо се сада нашој игри. Произвољан распоред квадратних плочица (произвољну позицију) можемо описати пермутацијом скупа $\{1, 2, \ldots, 16\}$, коју добијамо на следећи начин: записујемо редом бројеве плочица које, слева на десно стоје у првом реду, затим бројеве плочица које, слева на десно, стоје у другом реду итд. Када дођемо до празног поља ставимо број 16. На пример, позиција дате на сл. 7 одређена је пермутацијом,

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16), \qquad (1)$$

а позиција на сл. 8 одређена је пермутацијом

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16). \qquad (2)$$

Претпоставимо да се, полазећи од позиције на сл. 7, може добити позиција на сл. 8. Та промена се оставрује са неколико промена места квадратне плочице. При томе, свако померање квадратне плочице се у одговарајућој пермутацији манифестује заменом места броја којим је нумерисана та плочица и броја 16. С обзиром да је у позицијама 7 и 8 слободно поље исто, следи да је изведен паран број померања плочица (слободно поље је направила исти број померања навише и наниже, и такође исти број корака налево и надесно). То значи да је у пермутацији која одговара позицији на сл. 7 паран број пута вршена замена места броју 16 са другим бројевима. Дакле, паран број пута се мењала парност полазне пермутације, па следи да добијена пермутација има исту парност као и полазна.

Одредимо парност пермутација које одговарају позицијама на сликама 7 и 8. Број инверзија пермутације (1) једнак је 1, јер се само број 15 појављује као већи пре броја 14. Број инверзија пермутације (2) једнак је 0. Према томе, те две пермутације су различите парности. Зато се из позиције на сл. 7 не може после парног броја померања плочица добити позиција на сл. 8.

Тиме смо доказали да се из позиције на сл. 7 уопште не може добити позиција на сл. 8.

Када се ова игра купује, добије се квадратна табла са распоредом плочица као на сл. 8. Обично се игра састоји у томе да се плочице промешају, па да се онда реконструише полазна позиција. Ако вам неко да играчку са паспоредом плочица као на сл. 7, онда можете били сигурни да је он скинуо рам, распоредио плочице по жељи и онда опет поставио рам.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија