Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија во бројот XXXIII 6

Војислав Андрић (Ваљево)

ЗАНИМЉИВЕ ФИГУРЕ

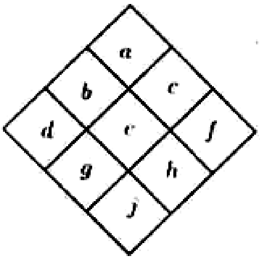
На насловним страницама свих овогодишњих бројева Математичког листа присутне су занимљиве фигуре у које је по одређеном правилу требало распоредити дате бројеве. Наши млади читаоци успешно су решили све занимљиве фигуре, при чему редакција није инсистирала на методу решавања. Циљ овог текста је да прикаже логику решавања занимљивих фигура, али где год је могуће и анализира број решења дате фигуре.

Пример 1. У поља датог квадрата (на слици 1.a) треба уписати бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да се у свако празно поље упише по један број, при чему се ниједан број не сме поновити и при чему се у сваком од хоризонталних редова добије потпун квадрат неког природног броја.

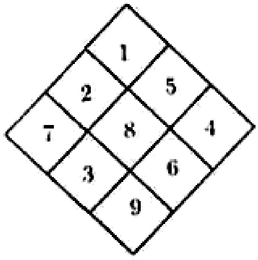
Поља датог квадрата обележимо са a, b, c, d, e, f, g, h, j. Како се квадрати природних бројева завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 или 9, јасно је да позиције a, c, f, h и j заузимају бројеви 1, 4, 5, 6 и 9, при чему су позиције a и j резервисане за једноцифрене потпуне квадрате, тј. бројеве 1, 4 или 9.

Дакле, преостале бројеве 2, 3, 7 или 8 треба распоредити у поља b, d, e, g. Бројеви bc и gh су потпуни квадрати (25, 36 или 81), што значи да број 7 није ни на позицији b, ни на позицији g. Јасно је да број 7 може бити само на позицијама d или e у оквиру бројева $729 = 27^2$, $784 = 28^2$ или $576 = 24^2$.

Ако су на позицијама bc и gh бројеви 25 и 36, онда на позицији def може бити број 784 (729 отпада због понављања броја 2, а 576 због понављања броја 6). Тада су на позицијама a и j бројеви 1 и 9. Како бројеви 25 и 36 и бројеви 1 и 9 могу мењати места, то у овом случају имамо $2 \cdot 2 = 4$ различита решења (слика 1.b).



Сл. 1.a

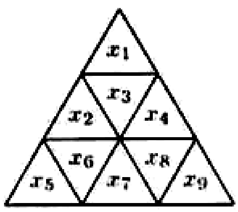


Сл. 1.b

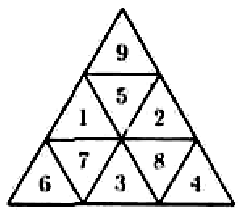
Ако су на позицијама bc и gh бројеви 25 и 81, онда су на позицијама a и j бројеви 4 и 9, па def може бити број 736 или 376, што је немогуће, јер ти бројеви нису потпуни квадрати.

Пример 2. У свако од 9 поља датог троугла странице 3 (на слици 2.a) треба уписати један од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да се ниједан број не понови, при чему је збир бројева у сваком од три добијена троугла странице 2 једнак.

Нека бројеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 у датом распореду представљају једно од могућих решења проблема.



Сл. 2.a



Сл. 2.b

Тада је $x_1+x_2+x_3+x_4 = x_2+x_5+x_6+x_7 = x_4+x_7+x_8+x_9 = S$, где је S тражени збир бројева у троуглу странице 2. Сабирањем добијених једнакости следи да $x_1+x_2+x_3+x_4+x_2+x_5+x_6+x_7+x_4+x_7+x_8+x_9 = 3S$. Како је $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9 =$

$1+2+3+4+\cdots+7+8+9=45$, то је $3S+x_2+x_4+x_7=45$, одакле се добија да је $x_2+x_4+x_7=3S-45=3(S-15)$.

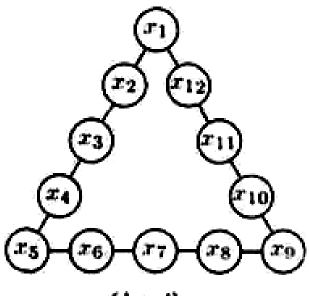
Дакле, $x_2+x_4+x_7$ мора бити дељиво са 3. Нека је $x_2+x_4+x_7=S_1$. Како је $6=1+2+3\leq S_1\leq 7+8+9=24$ и како је из горње једначине $S=15+S_1:3$, то је $17\leq S\leq 23$. То значи да у обзир долазе следеће могућности од којих неке имају а неке немају решења, при чему на слици 2.b дајемо једно решење, а у табели приказујемо укупан број различитих решења за сваки од распореда бројева на позиције $x_1, x_2, \ldots, x_9$.

Р Б	x_2	x_4	x_7	S_1	S	Број реше	Р Б	x_2	x_4	x_7	S_1	S	Број Реше
1.	1	2	3	6	17	96	6.	3	5	7	15	20	48
2.	1	4	7	12	19	96	7.	3	6	9	18	21	96
3.	1	5	9	15	20	48	8.	3	7	8	18	21	96
4.	2	3	7	12	19	96	9.	4	5	6	15	20	96
5.	2	5	8	15	20	96	10	7	8	9	24	23	96

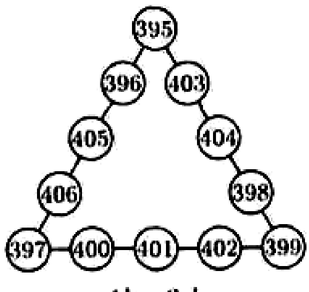
Према томе, проблем има 864 различитих решења.

Пример 3. У сваки од 12 кружића (на слици 3.a) треба уписати 12 узастопних природних бројева тако да је збир бројева на свакој страници троугла једнак 1999.

Нека бројеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 x_{10}, x_{11}, x_{12} у датом распореду представљају једно од могућих решења проблема.



Сл. 3.a



Сл. 3.b

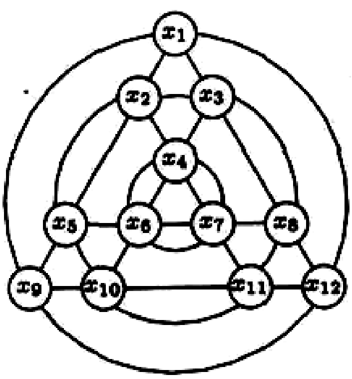
Тада је $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_1=1999$. Сабирањем те три једнакости добија се

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_1 + x_5 + x_9 = 3 \cdot 1999$. Како су тражених 12 природних бројева узастопни, ако је најмањи од њих x, онда је највећи $x + 11$, па се добија да је $6(x + x + 11) + x_1 + x_5 + x_9 = 5997$. Нека је $x_1 = x + a$, $x_5 = x + b$ и $x_9 = x + c$. Тада је $12x + 66 + 3x + a + b + c = 15x + 66 + a + b + c = 5997$. Дакле, $15x + a + b + c = 5931$.

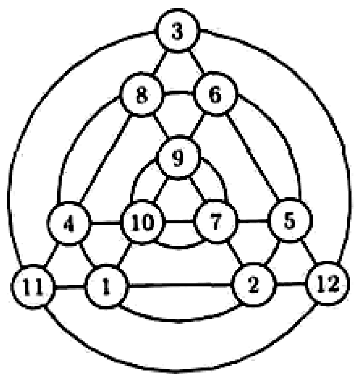
Из добијене једначине је $x + \frac{a+b+c}{15} = 395 + \frac{6}{15}$, па се добијају два различита решења: $x = 395$ и $a+b+c = 6$ или $x = 394$ и $a+b+c = 21$.

Први случај има 3 решења, а други 12, па има укупно 15 решења за a, b, c, тј. за x_1, x_5, x_9. У оквиру сваког од 15 решења могуће је направити 12 различитих комбинација. Међутим, то није све, јер у оквиру сваког појединачног решења постоји $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ различитих конфигурација, тако да је број решења далеко већи. Једно од могућих решења дато је на слици 3.b.

Пример 4. У сваки од 12 кружића (на слици 4.a) треба уписати бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, тако да је збир бројева на свакој од 6 правих једнак збиру бројева на свакој од 3 кружнице и једнак збиру бројева у сваком од 3 ромба.



Сл. 4.a



Сл. 4.b

Нека бројеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} у датом распореду представљају једно од могућих решења проблема, при чему је тражени збир једнак S.

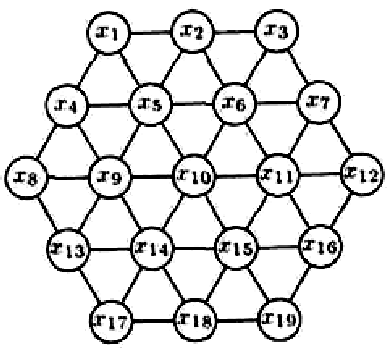
Тада је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = S$. Сабирањем те три једнакости добија се $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 +$

$x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=1+2+\cdots+11+12=78=3\,S=78$, па је $S=26$.

Ако се посматрају кругови, онда је $x_1+x_9+x_{12}=x_4+x_6+x_7=26$, па због $12+11+x=26$, најмањи од ових бројева мора бити већи или једнак броју 3. Слично је $x_2+x_3+x_5+x_8+x_{10}+x_{11}=26$, па због $1+2+3+4+5+x=11$, највећи од ових бројева мора бити мањи или једнак 11. Нека су x_1, x_9, $x_{12}\in\{12,11,3\}$. Онда су x_4, x_6, $x_7\in\{10,9,7\}$. Једно од могућих решења, у том случају је дато на слици 4.b.

Пример 5. У сваки од 19 кружића (на слици 5) треба уписати бројеве 1, 2, 3, ..., 17, 18, 19, тако да је збир бројева у сваком од 8 могућих шестоуглова једнак.

Нека бројеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, у датом распореду представљају једно од могућих решења проблема, при чему је тражени збир у оквиру једног шестоугла једнак S.

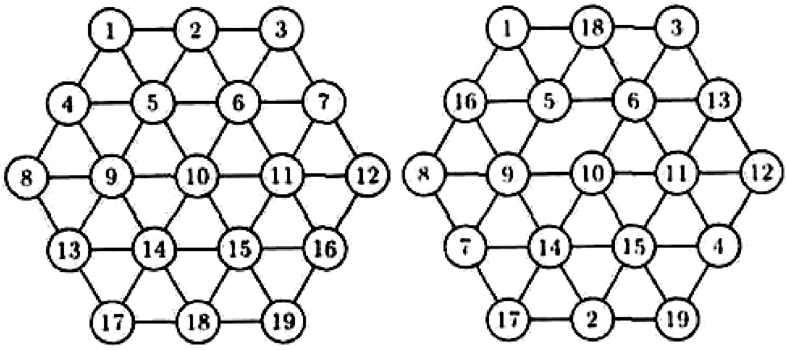


Сл. 5

Тада је $x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_9+x_{10}=x_2+x_3+x_5+x_7+x_{10}+x_{11}=x_4+x_5+x_8+x_{10}+x_{13}+x_{14}=x_5+x_6+x_9+x_{11}+x_{14}+x_{15}=x_6+x_7+x_{10}+x_{12}+x_{15}+x_{16}=x_9+x_{10}+x_{13}+x_{15}+x_{17}+x_{19}=x_{10}+x_{11}+x_{14}+x_{16}+x_{18}+x_{19}=x_1+x_3+x_8+x_{12}+x_{17}+x_{19}=S$.

Сабирањем тих 8 једнакости, добија се да је $2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19})+S+4x_{10}=8\,S$. Дакле, $380+4x_{10}=7\,S$, па је $S=52+\frac{4}{7}(x_{10}+4)$. Одавде је јасно да $(x_{10}+4)$ мора бити дељиво са 7, па x_{10} може бити један од бројева 3, 10, 17.

Ако је $x_{10} = 10$, онда се методом симетрије лако долази до решења, јер је $S = 60$. Бројеве распоредимо у природном низу тако да је $x_k = k$, где је $k = 1, 2, 3, \ldots, 17, 18, 19$ (слика 6.*a*).



Сл. 6.a *Сл. 6.b*

Сада бројевима које се не налазе на осама симетрије дате фигуре централно симетрично променимо места у односу на центар симетрије (број x_{10}) и добијемо једно од могућих решења (слика 6.*b*). Користећи симетрију могу се добити и друге конфигурације овог решења.