Ристо Малчески
Скопје

ДВАЕСЕТ И ПЕТ ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

Во оваа статија ќе презентираме група решени задачи од геометриски неравенства, повеќето од кои се задавани на национални турнири или олимпијади на балканските држави. Важно е да напоменеме дека покрај потребните знаења од областа на геометријата за решавање на овие задачи се неопходни и знаењата од алгебарските и аналитичките неравенства.

1. Докажи дека во правоаголен триаголник важи $a+b<c+h$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h е должината на висината повлечена кон хипотенузата.

Решение. Имаме:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=c^2+2ch<c^2+2ch+h^2=(c+h)^2,$$

па затоа $a+b<c+h$.

2. Нека a,b и c се страни на триаголник и

$$A=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \text{ и}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

Докажи дека $AB\geq 9$.

Решение. Од

$$(a+b-c)(b+c-a)=b^2-(c-a)^2\leq b^2$$

и аналогните неравенства добиваме

$$B\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Освен тоа,

$$A-(a+b+c)=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0,$$

па затоа од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува:

$$AB\geq(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})\geq 9.$$

3. Докажи го неравенството

$$(t_a^2+t_b^2+t_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\geq 27P^2,$$

каде h_a,h_b,h_c се должините на висините, t_a,t_b,t_c се должините на тежишните линии и P е плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Ако ги искористиме равенствата

$$t_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\ t_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4},\ t_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4},$$

тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}(t_a^2+t_b^2+t_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)&=\tfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\\ &\geq\tfrac{3}{4}(ah_2+bh_b+ch_c)^2\\ &=\tfrac{3}{4}(3\cdot 2P)^2=27P^2.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако a^2,b^2,c^2 и h_a^2,h_b^2,h_c^2 се пропорционални, што значи ако и само ако триаголникот е рамностран.

4. Нека t_a,t_b,t_c се должините на тежишните линии повлечени соодветно од темињата A,B,C во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$t_at_b+t_bt_c+t_ct_a<\tfrac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

Решение. *Лема*. Ако a,b,c се должини на страни на триаголник, тогаш важи

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca). \qquad (1)$$

Доказ. Од неравенството на триаголник следува

$$a(b+c-a)>0, b(c+a-b)>0, c(a+b-c)>0.$$

Сега, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (1). ■

Прв начин. Ако тежишната линија t_a ја продолжиме два пати, тогаш од соодветниот паралелограм добиваме $2t_a<b+c$, т.е. $t_a<\frac{b+c}{2}$. Аналогно се добива $t_b<\frac{c+a}{2}$ и $t_c<\frac{a+b}{2}$. Сега, од последните три неравенства и од лемата следува

$$\begin{aligned}t_at_b+t_bt_c+t_ct_a&<\tfrac{ab+ac+bc+b^2}{4}+\tfrac{ab+ac+bc+a^2}{4}+\tfrac{ab+ac+bc+b^2}{4}\\ &=\tfrac{3}{4}(ab+bc+ca)+\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\leq\tfrac{5}{4}(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Втор начин. Ќе користиме

$$t_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\ t_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4},\ t_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}. \qquad (2)$$

Како и во првиот начин на решавање имаме $t_a<\frac{b+c}{2}$, $t_b<\frac{c+a}{2}$ и $t_c<\frac{a+b}{2}$, од каде следува $t_a+t_b+t_c<a+b+c$. Последното неравенство го квадрираме и ако ги искористиме равенствата (2), по средувањето на десната страна добиваме

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}+2(t_at_b+t_bt_c+t_ct_a)<a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

па ако ја искористиме лемата добиваме

$$t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a < \frac{a^2+b^2+c^2}{8} + ab + bc + ca < \frac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

5. На страната BC на триаголникот ABC се дадени точки D и E, при што D е меѓу B и E. Ако p_1 и p_2 се соодветно периметрите на триаголниците ABC и ADE, докажи дека $p_1 > p_2 + 2\min\{\overline{BD}, \overline{CE}\}$.

Решение. Со p_{XYZ} ќе го означуваме периметарот на $\triangle XYZ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BD} < \overline{CE}$. Нека A' и D' се симетричните точки соодветно на точките A и D во однос на средината на страната BC (направи цртеж). Бидејќи $p_{ADD'} \geq p_{ADE}$, доволно е да докажеме дека важи $p_{ABC} > p_{ADD'} + 2\overline{BD}$, што е еквивалентно со

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{AD} + \overline{AD'}, \text{ т.е. } \overline{AB} + \overline{BA'} > \overline{AD} + \overline{DA'}.$$

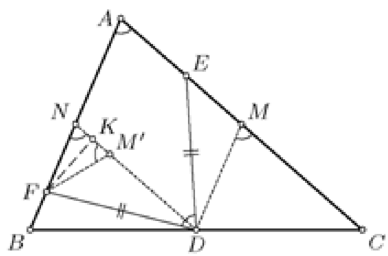
Последното неравенство следува од неравенствата

$$\overline{AB} + \overline{BA'} > \overline{AK} + \overline{KA'} > \overline{AD} + \overline{DA'},$$

каде K е пресекот на правите $A'D$ и AB.

6. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната BC, а на страните AC и AB соодветно се земени точки E и F такви што $\overline{DE} = \overline{DF}$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$. Докажи го неравенството

$$\overline{DE} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$



Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} \leq \overline{AC}$. Нека M и N се средините на страните AC и AB, соодветно, а M' е точка на отсечката DN таква што $\overline{DM'} = \overline{DM}$. Бидејќи $\measuredangle M'DF = \measuredangle MDE$, триаголниците DME и MDE се складни, па затоа важи

$$\measuredangle FM'N = 180^\circ - \measuredangle DM'F = 180^\circ - \measuredangle DME = \measuredangle BAC = \measuredangle FNM',$$

што значи дека триаголникот $FM'N$ е рамнокрак. Средината K на отсечката $M'N$ истовремено е подножје на нормалата повлечена од точката F на $M'N$, па затоа

$$\overline{DF} \geq \overline{DK} = \frac{\overline{DM'} + \overline{DN}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$

7. Нека O е внатрешна точка на $\triangle ABC$ и нека AO, BO, CO ги сечат страните BC, CA, AB соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Ако AA_1 е најдолга од отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 докажи дека

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} \le \overline{AA_1}.$$

Решение. Односот на плоштините на триаголниците OBC и ABC е еднаков на односот на нивните висини повлечени од O и A, а тој е еднаков на $x = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}}$. Слично, $y = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{P_{AOC}}{P_{ABC}}$ и $z = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}} = \frac{P_{AOB}}{P_{ABC}}$. Јасно, $x + y + z = 1$, па затоа

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = x\overline{AA_1} + y\overline{BB_1} + z\overline{CC_1} \le (x + y + z)\overline{AA_1} = \overline{AA_1}.$$

8. Нека AM и BN ($M \in BC, N \in AC$) се симетрали соодветно на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$ во $\triangle ABC$. Ако $AM \cap BN = I$, а опишаните кружници соодветно околу $\triangle ANI$ и $\triangle BMI$ по втор пат се сечат во точката L која припаѓа на страната AB, докажи дека плоштината на $\triangle MNL$ е помала или еднаква на четвртина од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Од $\measuredangle CNI = \measuredangle ALI,\ \measuredangle CMI = \measuredangle BLI$ и $\measuredangle ALI + \measuredangle BLI = 180^\circ$ следува дека четириаголникот $NICM$ е тетивен. Затоа

$$180^\circ = \gamma + \measuredangle NIM = \gamma + 90^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{3}{2}\gamma + 90^\circ, \text{ т.е. } \gamma = 60^\circ.$$

Сега,

$$\measuredangle CNM = \measuredangle CNB - \measuredangle MNB = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta - 30^\circ = \tfrac{1}{2}\alpha + 30^\circ$$

и $\measuredangle LNM = \measuredangle LNI + \measuredangle MNI = \frac{1}{2}\alpha + 30^\circ$. Според тоа, $\measuredangle CNM = \measuredangle LNM$ и аналогно $\measuredangle CNM = \measuredangle LNM$, т.е. $\triangle LNM \cong \triangle CMN$. Добиваме

$$\frac{P_{LMN}}{P_{ABC}} = \frac{P_{CMN}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{CN}}{\overline{CB} \cdot \overline{CA}} = \frac{\frac{ab}{b+c}\frac{ab}{a+c}}{ab} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Треба да докажеме дека

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \le \frac{1}{4}, \text{ т.е. } (a+c)(b+c) \ge 4ab.$$

Бидејќи $a + c \ge 2\sqrt{ac}$ и $b + c \ge 2\sqrt{bc}$ доволно е да докажеме дека $c^2 \ge ab$. Од косинусната теорема и неравенството $a^2 + b^2 \ge 2ab$ имаме

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \ge ab,$$

со што задачата е решена.

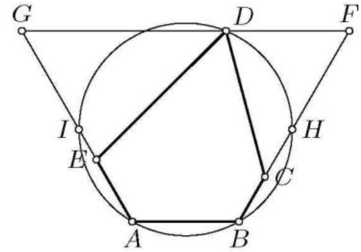
9. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} = 1$, $\measuredangle BAE = \measuredangle ABC = 120^\circ$, $\measuredangle CDE = 60^\circ$ и $\measuredangle ADB = 30^\circ$. Докажи дека плоштината на петаголникот $ABCDE$ е помала од $\sqrt{3}$.

Решение. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABD$ и l е правата низ D паралелна со AB. Радиусот на кружницата k е 1. Полуправите BC и AE ја сечат k во точките H и I, а правата l во точките F и G, соодветно.

Триаголниците FCD и CDE се слични бидејќи важи

$$\measuredangle CFD = \measuredangle DGE = 60^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle FCD = 120^\circ - \measuredangle CDF = \measuredangle GDE .$$



Да го означиме со $k = \frac{\overline{FC}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{GE}}$ коефициентот на сличност, со h растојанието од точката D до HI и $x = \overline{FD}, y = \overline{GD}$.

Лесно се пресметува дека $x + y = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} h$ и $xy = \frac{4}{3} h^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} h$ (производот xy е степенот на точката F во однос на k и е еднаков на $\overline{OF}^2 - 1$, каде O е центарот на кружницата k). Така добиваме

$$P_{ABFG} = \tfrac{1}{2}(1 + x + y)(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + h) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} h^2 + 2h + \tfrac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$P_{FCD} + P_{CDE} = \tfrac{1}{2}(x \cdot \overline{FC} + y \cdot \overline{GE}) \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{4} xy(k + \tfrac{1}{k}) \geq \tfrac{\sqrt{3}}{2} xy = \tfrac{2}{\sqrt{3}} h^2 + h,$$

па затоа

$$P_{ABCDE} = P_{ABFG} - (P_{FCD} + P_{CDE}) \leq -\tfrac{1}{\sqrt{3}} h^2 + h + \tfrac{3\sqrt{3}}{4} = f(h) .$$

Квадратната функција $f(h)$ достигнува максимум $f_{\max} = \sqrt{3}$ за $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, со што е докажано дека $P_{ABCDE} \leq \sqrt{3}$. Знак за равенство важи ако и само ако $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $k = 1$. Тогаш, бидејќи без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{DA} \geq \overline{DB}$, точката D ќе биде симетрична на точката B во однос на HI, па затоа триаголникот ADG ќе биде рамностран и ќе важи $\overline{FC} = \overline{GD} = \overline{GA} = \overline{FB}$, што не е можно бидејќи во таков случај точките B и C би се совпаѓале. Затоа важи $P_{ABCDE} < \sqrt{3}$.

10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на впишаната кружница r. Нека H е ортоцентарот, а A', B', C' се подножјата на висините h_a, h_b, h_c повлечени соодветно од темињата A, B, C. Да означиме $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$. Нека d_a, d_b, d_c се растојанијата на ортоцентарот до страните BC, CA, AB, соодветно. Ако $a \geq b \geq c$ докажи дека:

а) $h_a \leq h_b \leq h_c$, б) $d_a \geq d_b \geq d_c$,

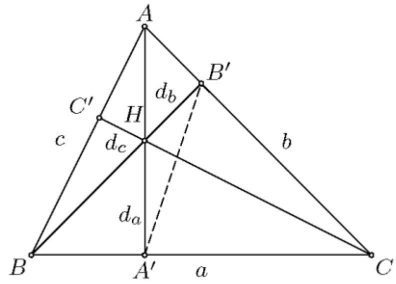
в) $\overline{AH} \leq \overline{BH} \leq \overline{CH}$, и г) $d_a + d_b + d_c \leq 3r$.

Решение. а) Од $a \geq b \geq c$ следува $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$. Според тоа, $\frac{2P}{a} \leq \frac{2P}{b} \leq \frac{2P}{c}$, т.е.

$h_a \le h_b \le h_c$. Равенства важат ако и само ако важат во почетните неравенства $a \ge b \ge c$.

в) Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BC'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CC'}^2 = a^2 - h_c^2 \ge b^2 - h_c^2$$
$$= \overline{AC}^2 - \overline{CC'}^2 = \overline{AC'}^2.$$



Според тоа,

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{C'H}^2$$
$$\le \overline{BC'}^2 + \overline{C'H}^2 = \overline{BH}^2,$$

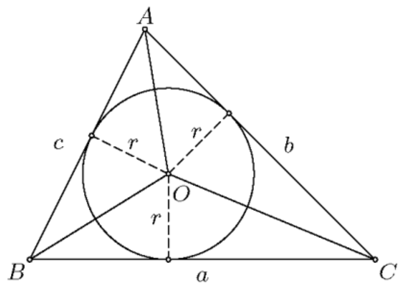
па затоа $\overline{AH} \le \overline{BH}$. Аналогно се докажува дека $\overline{BH} \le \overline{CH}$.

б) Имаме, $\measuredangle A'HC = 90^\circ - \measuredangle HCA' = \measuredangle CBC' = \beta$. Понатаму, четириаголникот $A'CB'H$ е тетивен, па затоа $\measuredangle A'B'C = \beta$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle B'A'C = \alpha$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, па како $a \ge b$ добиваме дека $\overline{B'C} \ge \overline{A'C}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle A'HC$ и $\triangle B'HC$ следува

$$d_a^2 = \overline{A'H}^2 = \overline{HC}^2 - \overline{A'C}^2 \ge \overline{HC}^2 - \overline{B'C}^2 = \overline{B'H}^2 = d_b^2,$$

од каде добиваме $d_a \ge d_b$. Аналогно се докажува дека $d_b \ge d_c$. Знак за равенство важи ако и само ако во почетните неравенства важи знак за равенство.

г) Имаме, $2P = (a+b+c)r$ и бидејќи $2P = ad_a + bd_b + cd_c$, заради $a \ge b \ge c$ и $d_a \ge d_b \ge d_c$ од неравенството на Чебишев следува



$$(a+b+c)r = ad_a + bd_b + cd_c$$
$$\ge \frac{(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)}{3},$$

па затоа $d_a + d_b + d_c \le 3r$. Равенство во неравенството на Чебишев важи ако и само ако $a = b = c$ или $d_a = d_b = d_c$ што е само во случај на рамностран триаголник.

11. Даден е триаголник ABC со страни a, b, c и плоштина S.

а) Докажи дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Ако S_1 е плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$ докажи дека $S_1^2 \ge \frac{S\sqrt{3}}{4}$.

Решение. а) Од $\sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ и аналогните две неравенства следува дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Според Хероновата формула плоштината на триаголникот со страни $a = y+z,\ b = z+x, c = x+y$ е

$$S = \sqrt{xyz(x+y+z)} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} .$$

Така

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{xy + yz + zx} ,$$

па неравенството се сведува на

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)} ,$$

т.е. на неравенството

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z) .$$

Последното неравенство следува од очигледното неравенство

$$(xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0.$$

12. Точката X припаѓа на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$ и е таква што дијагоналата BD ја полови отсечката CX, а дијагоналата AC ја полови отсечката DX. Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Решение. *Одговор* 2.

Прво ќе докажеме дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \geq 2$. Нека дијагоналите се сечат во точката O, $C_1 = DX \cap AC$ и $D_1 = CX \cap BD$. Тоа значи дека CC_1 и DD_1 се тежишни линии во $\triangle CDX$, а точката O е тежиште на овој триаголник. Според тоа, X, O и средината X_1 на CD лежат на една права и важи $\overline{OX} = 2\overline{OX_1}$.

Нека Y е средината на AB. Бидејќи $\triangle ABO \sim \triangle CDO$ и OY и OX_1 се соодветни тежишни линии во овие триаголници следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OX_1}} = \frac{2\overline{OY}}{\overline{OX}} ,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{OY} \geq \overline{OX}$.

Од горната сличност следува дека $\measuredangle AOY = \measuredangle DOX_1 = \measuredangle BOX$, т.е. полуправите OY и OX се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle AOB$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AO} \geq \overline{BO}$. Тогаш важи $\measuredangle AOY \leq \frac{1}{2}\measuredangle AOB$ и важи $\overline{AX} > \overline{AY}$. Според тоа,

$$\measuredangle OXY = \measuredangle BOX + \measuredangle ABO \leq \measuredangle AOY + \measuredangle BAO = \measuredangle OYX ,$$

од каде следува $\overline{OY} \geq \overline{OX}$.

Конфигурација при која се достигнува равенството $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$ се добива од рамностраниот $\triangle ABE$, во кој C, D, X се средините на страните BE, AE, AB, соодветно.

13. Во триаголникот ABC симетралите на внатрешнисе агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките D и E, соодветно. Докажи дека $\overline{DE} \le (3-\sqrt{8})(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$. Определи ги аглите на триаголникот за кој важи знак за равенство.

Решение. Нека права која минува низ средината M на отсечката DE ги сече страните CB и CA во точките P и Q соодветно (направи цртеж). Ќе докажеме дека $\overline{DE} < \overline{PQ}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{CA} \le \overline{CB}$. Лесно се докажува дека $\measuredangle CDE > \measuredangle CPQ$, па затоа на отсечката MP постои точка P' таква што $\measuredangle MP'D = \measuredangle MEQ$. Точките D, E, P', Q припаѓаат на некоја кружница со центар O и радиус r, при што $OM \perp DE$. Ако N е подножјето на нормалата повлечена од O на $P'Q$, тогаш важи $\measuredangle ONM = 90^\circ$, па затоа $\overline{ON} \le \overline{OM}$ и оттука

$$\overline{DE}^2 = 4(r^2 - \overline{OM}^2) \le 4(r^2 - \overline{ON}^2) = \overline{P'Q}^2 \le \overline{PQ}^2 .$$

Сега да ја пресметаме $\overline{PQ}$. Ако означиме $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$, тогаш $\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{a}{a+c}, \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{b}{b+c}$ и $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}(\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}})$, пазатоа $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c})$. Бидејќи

$$(a+c)(2a+c) = 2a^2 + 3ac + c^2 \ge (3+\sqrt{8})ac$$

и аналогно

$$(b+c)(2b+c) \ge (3+\sqrt{8})bc ,$$

добиваме

$$\overline{DE} \le \overline{PQ} \le \frac{1}{2}(\frac{2b+c}{3+\sqrt{8}} + \frac{2a+c}{3+\sqrt{8}}) = (3-\sqrt{8})(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}) .$$

Знак за равенство важи ако и само ако $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, т.е. ако аглите се $45, 45^\circ, 90^\circ$.

14. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c, соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, докажи дека

$$r^2 \le \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) .$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$. Јасно,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = r_a + r_b + r_c .$$

Имаме $P=sr$, $s-a=r_a, s-b=r_b, s-c=r_c$, па од Хероновата формула следува

$$r^2=\frac{P^2}{s^2}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}=\frac{r_ar_br_c}{r_a+r_b+r_c}.$$

Конечно, од неравенствата меѓу средините следува

$$r^2=\frac{r_ar_br_c}{r_a+r_b+r_c}\leq\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{9}.$$

15. Даден е трапез $ABCD\,(AB\,||\,CD)$. Ако R_1 и R_2 се радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ACD и BCD, докажи дека $4R_1R_2\geq\overline{AB}^2$.

Решение. Радиусот на опишаната кружница околу $\triangle XYZ$ ќе го означуваме со R_{XYZ}. Имаме $2R_{ACD}=\frac{\overline{AC}}{\sin\measuredangle ADC}$ и $2R_{BCD}=\frac{\overline{BD}}{\sin\measuredangle BCD}$, па затоа

$$4R_{ACD}R_{BCD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\sin\measuredangle ADC\sin\measuredangle BCD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\sin\measuredangle ABC\sin\measuredangle BAD}=4R_{ABC}R_{ABD}\geq\overline{AB}^2,$$

бидејќи $2R_{ABC},2R_{ABD}\geq\overline{AB}$.

16. Низ пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник е повлечена произволна права. Докажи дека должината на делот на правата внатре во четириаголникот не е поголема од должината на барем една негова дијагонала.

Решение. Нека O е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ и нека права низ O ги сече AB и CD во точките X и Y, соодветно (направи цртеж). Да означиме $\measuredangle AOX=\measuredangle COY=\alpha$ и $\measuredangle BOX=\measuredangle DOY=\beta$. Имаме $P_{AOX}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OX}\sin\alpha, P_{BOX}=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OX}\sin\beta$ и $P_{AOB}=P_{AOX}+P_{BOX}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin(\alpha+\beta)$. Оттука добиваме

$$\overline{OX}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin(\alpha+\beta)}{\overline{OA}\sin\alpha+\overline{OX}\sin\beta}\leq\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}(\sin\alpha+\sin\beta)}{\overline{OA}\sin\alpha+\overline{OB}\sin\beta}\leq\frac{\overline{OA}\sin\beta+\overline{OB}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

Слично важи $\overline{OY}\leq\frac{\overline{OC}\sin\beta+\overline{OD}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$, па затоа

$$\overline{XY}\leq\frac{\overline{AC}\sin\beta+\overline{BD}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}\leq\max\{\overline{AC},\overline{BD}\}.$$

17. Нека r и R се дијаметрите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот ABC. Нека r_a е радиусот на кружницата γ_a која одвнатре ја допира опишаната кружница во точката A, а надворешно ја допира впишаната крушница. Аналогно се дефинираат r_b и r_c. Докажи го неравенството

$$\frac{R-r_a}{r+4r_a}+\frac{R-r_b}{r+4r_b}+\frac{R-r_c}{r+4r_c}\geq\frac{3R}{4r}.$$

Решение. Со S да го означиме центарот на кружницата γ_a, а со S и O

центрите на впишаната и опишаната кружница, соодветно. Точката S_a припаѓа на отсечката OA, па од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{SS_a}^2 = \frac{r_a}{R}\overline{SO}^2 + \frac{R-r_a}{R}\overline{SA}^2 - r_a(R-r_a).$$

Бидејќи $\overline{SS_a} = r + r_a$ и според теоремата на Ојлер $\overline{SO}^2 = R^2 - 2Rr$, добиваме

$$R(r+r_a)^2 = r_a(R^2-2Rr) + (R-r_a)\overline{SA}^2 - r_a(R-r_a),$$

од каде по средувањето добиваме

$$r_a = \frac{R(\overline{SA}^2 - r^2)}{\overline{SA}^2 + 4Rr},\ \frac{R-r_a}{r+4r_a} = \frac{Rr}{\overline{SA}^2}.$$

Аналогни изрази се добиваат за r_b и r_c, со што даденото неравенство се сведува на

$$\frac{r^2}{\overline{SA}^2} + \frac{r^2}{\overline{SB}^2} + \frac{r^2}{\overline{SC}^2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{3}{4},$$

што е еквивалентно со

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Последното неравенство се докажува едноставно

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma \\ &\le 2\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \\ &= 1 + 2\sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

18. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина S. Докажи дека

$$\overline{AC}(\overline{BD} + \overline{BF} - \overline{DF}) + \overline{CE}(\overline{BD} + \overline{DF} - \overline{BF}) + \overline{AE}(\overline{BF} + \overline{DF} - \overline{BD}) \ge 2\sqrt{3}S. \quad (*)$$

Решение. *Лема*. Нека впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA и AB соодветно во точките X, Y и Z. Тогаш постои точка O за која се исполнети неравенствата

$$\overline{OA} \le \frac{2\overline{AY}}{\sqrt{3}}, \overline{OB} \le \frac{2\overline{BZ}}{\sqrt{3}}, \overline{OC} \le \frac{2\overline{CX}}{\sqrt{3}}.$$

Доказ. Да означиме $\overline{CX} = x, \overline{AY} = y, \overline{BZ} = z$. Јасно, постои реален број r таков што трите кружници со центри во точките A, B, C и радиуси соодветно ry, rz, rx имаат заедничка точка, која е внатрешна за $\triangle ABC$. Нека O е една таква заедничка точка, т.е. $\overline{OA} = ry, \overline{OB} = rz$ и $\overline{OC} = rx$. Доволно е да докажеме дека $r \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Барем еден од аглите $\measuredangle AOB, \measuredangle BOC, \measuredangle COA$ е поголем или еднаков на 120°. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\measuredangle BOC \ge 120^\circ$. Тогаш

$$-\tfrac{1}{2}=\cos 120^\circ \geq \cos\measuredangle BOC=\frac{r^2(x^2+z^2)-(x+z)^2}{2xzr^2}.$$

Ако допуштиме дека $r>\frac{2}{\sqrt{3}}$ го добиваме неравенството

$$2xz>x^2+z^2,$$

кое не е точно. Според тоа, $r\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ и точката O го има саканото својство. ■

Сега од лемата применета за $\triangle BDF$ добиваме

$$\overline{AC}(\overline{BD}+\overline{BF}-\overline{DF})=2\overline{AC}\cdot\overline{BZ}\geq\sqrt{3}\overline{AC}\cdot\overline{BO}\geq 2\sqrt{3}S_{ABCD}$$

и аналогно

$$\overline{CE}(\overline{BD}+\overline{DF}-\overline{BF})\geq 2\sqrt{3}S_{CDEO} \text{ и } \overline{AE}(\overline{BF}+\overline{DF}-\overline{BD})\geq 2\sqrt{3}S_{DEAO}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (*).

19. Нека m_c и l_c се должините на медијаната и симетралата на аголот при темето C во $\triangle ABC$ со плоштина S. Ако $\gamma=\measuredangle BCA$, докажи дека

$$m_c l_c \geq S\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2}.$$

Решение. Имаме

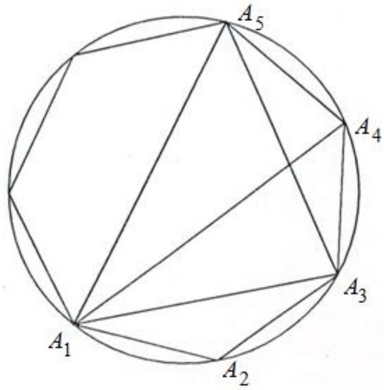
$$m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4},\quad l_c^2=\frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2-c^2),\ S\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}.$$

Според тоа,

$$m_c^2 l_c^2-S^2\operatorname{ctg}^2\tfrac{\gamma}{2}=\frac{((a+b)^2-c^2)(4ab((a+b)^2+(a-b)^2-c^2)-(a+b)^2((a+b)^2-c^2))}{16(a+b)^2}$$

$$=\frac{((a+b)^2-c^2)(a-b)^2(c^2-(a-b)^2)}{16(a+b)^2}=(\tfrac{a-b}{a+b})^2S^2\geq 0.$$

20. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ се правилни седумаголници со плоштини S_A,S_B,S_C, за кои важи $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_3}=\overline{C_1C_4}$. Докажи дека $\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}$.



Решение. Нека

$$\overline{A_1A_2}=a,\ \overline{A_1A_3}=b,\ \overline{A_1A_4}=c.$$

Од теоремата на Птоломеј за четириаголникот $A_1A_3A_4A_5$ следува дека

$$ab+ac=bc,\text{ т.е. } \tfrac{a}{b}+\tfrac{a}{c}=1.$$

Бидејќи $\triangle A_1A_2A_3\sim\triangle B_1B_2B_3$, добиваме $\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{a}{b}$ и затоа $\overline{B_1B_2}=\frac{a^2}{b}$. Аналогно

$\overline{C_1C_2} = \frac{a^2}{c}$. Според тоа,

$$\frac{S_B+S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} .$$

Имаме $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} > \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{a}{c})^2 = \frac{1}{2}$, бидејќи $\frac{a}{b} \neq \frac{a}{c}$. Од друга страна

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = (\frac{a}{b} + \frac{a}{c})^2 - \frac{2a^2}{bc} = 1 - \frac{2a^2}{bc} . \qquad (1)$$

Од синусната теорема следува дека

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{4\cos\frac{2\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})} .$$

Бидејќи $\cos\frac{2\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ добиваме

$$\frac{a^2}{bc} > \frac{1}{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})} = \sqrt{2} - 1 .$$

Оттука и од (1) следува десното неравенство кое требаше да го докажеме.

21. Нека M е тежиште на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$\sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM \leq \frac{2}{\sqrt{3}} ,$$

а) ако опишаната кружница околу $\triangle AMC$ ја допира правата AB,

б) за произволен $\triangle ABC$.

Решение. ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Нека G е средината на страната AB.

а) Од условот следува дека

$$(\tfrac{c}{2})^2 = \overline{GA}^2 = \overline{GM} \cdot \overline{GC} = \tfrac{1}{3}m_c^2 = \tfrac{1}{12}(2a^2 + 2b^2 - c^2) ,$$

т.е. $a^2 + b^2 = 2c^2$. Сега, од формулите за медијаните добиваме $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ и $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Затоа

$$A = \sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM = \frac{P}{bm_a} + \frac{P}{am_b} = \frac{(a^2+b^2)\sin\gamma}{\sqrt{3}ab} .$$

Од косинусната теорема добиваме

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \text{ т.е. } a^2 + b^2 = 4ab\cos\gamma .$$

Затоа, $A = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

б) Постојат две кружници низ C и M кои се допираат до правата AB. Допирните точки да ги означиме со A_1 и B_1, при што A_1 лежи на полуправата GA, а B_1 на полуправата GB. Бидејќи G е средина на A_1B_1 и $\overline{CM} : \overline{MG} = 2:1$ точката M е тежиште на $\triangle A_1B_1C$. Освен тоа, јасно е дека

$$\measuredangle CAM \le \measuredangle CA_1M \text{ и } \measuredangle CBM \le \measuredangle CB_1M .$$

Да претпоставиме дека $\measuredangle CA_1M \le 90^\circ$ и $\measuredangle CB_1M \le 90^\circ$. Тогаш од а) следува дека

$$\sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM \le \sin\measuredangle CA_1M + \sin\measuredangle CB_1M \le \tfrac{2}{\sqrt{3}} .$$

Останува да го разгледаме случајот кога $\measuredangle CA_1M > 90^\circ$ и $\measuredangle CB_1M \le 90^\circ$ (двата агли не може да се истовремено тапи). Од $\triangle CA_1M$ следува дека $\overline{CM}^2 > \overline{CA_1}^2 + \overline{A_1M}^2$, т.е.

$$\tfrac{1}{9}(2b_1^2 + 2a_1^2 - c_1^2) > b_1^2 + \tfrac{1}{9}(2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2),$$

(a_1, b_1, c_1 се страните на $\triangle A_1B_1C$). Од а) имаме $a_1^2 + b_1^2 = 2c_1^2$, па горното неравенство е еквивалентно на неравенството $a_1^2 > 7b_1^2$. Сега, од а) имаме

$$\sin\measuredangle CB_1M = \tfrac{b_1\sin\gamma_1}{a_1\sqrt{3}} = \tfrac{b_1}{a_1\sqrt{3}}\sqrt{1-(\tfrac{a_1^2+b_1^2}{4a_1b_1})^2} .$$

Ако ставиме $\frac{b_1^2}{a_1^2} = x$, бидејќи $x < \frac{1}{7}$, добиваме дека

$$\sin\measuredangle CB_1M = \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{14x - x^2 - 1} < \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{2 - \tfrac{1}{49} - 1} = \tfrac{1}{7} .$$

Според тоа,

$$\sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM < 1 + \sin\measuredangle CB_1M < 1 + \tfrac{1}{7} < \tfrac{2}{\sqrt{3}} .$$

22. Определи го најмалиот број m таков што со секои пет рамнострани триаголници со збир на плоштините m може да се покрие рамностран триаголник со плоштина 1.

Решение. Ќе докажеме дека $m = 2$. Прво ќе докажеме дека $m \ge 2$. Доволно е за секој $s \in (0,1)$ да најдеме пет рамнострани триаголници со збир на плоштините поголем од $2s$, кои не може да покријат рамностран $\triangle ABC = \Delta$ со плоштина 1. Нека $A_1B_1C_1$ е рамностран триаголник со плоштина $\frac{1+s}{2}$ и темињата му се на соодветните страни на Δ. Нека за определеност земеме $2\overline{BA_1} < \overline{BC}$. Очигледно постојат три рамнострани триаголници кои не може да ја покријат било која од отсечките BA_1, CB_1 и AC_1. Тогаш овие триаголници и два рамнострани триаголници Δ_1 и Δ_2 со плоштина s не може да го покријат Δ. Во спротивно Δ_1 и Δ_2 треба да покријат точки од горните три отсечки и затоа еден од нив, на пример Δ_1, ќе покрие точки од две од нив, да кажеме $D \in A_1B$ и $E \in B_1C$. Бидејќи $P_{A_1B_1C_1} \ge \frac{1}{3}$, важи $\measuredangle A_1B_1C_1 \ge 90^\circ$ (Докажи!), па затоа страната на Δ_1 е барем $\overline{DE} \ge \overline{A_1B_1}$. Според тоа, $P_{\Delta_1} \ge P_{A_1B_1C_1}$, што е противречност.

Ќе докажеме дека меѓу секои пет рамнострани триаголници со плоштини a^2, b^2, c^2, d^2 и e^2 , за кои $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=2$ има четири кои може да го покријат Δ. Нека $a \ge b \ge c \ge d \ge e > 0$. Ако $a \ge 1$, тогаш триаголникот со плоштина a^2 го покрива Δ. Во спротивен случај $b+c>1$. Последното е очигледно ако $c > \frac{1}{2}$, а во спротивно

$$b^2 = 2-a^2-c^2-d^2-e^2 > 1-3c^2 \ge (1-c)^2 .$$

Тогаш триаголниците со плоштини a^2, b^2 и c^2, поставени стандардно во темињата на Δ, ќе се сечат по парови. Тие нема да го покриваат Δ ако $f = 2-a-b-c > 0$ и преостанува рамностран триаголник со плоштина f^2. Треба да покажеме дека $d \ge f$. Последното е очигледно ако $d > \frac{1}{2}$ (бидејќи $a,b,c \ge d$), а во спротивно од $a,b,c < 1$ следува дека

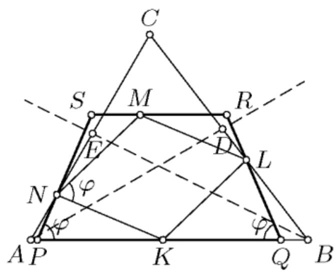
$$d \ge 2d^2 \ge d^2+e^2 = 2-a^2-b^2-c^2 > 2-a-b-c = f .$$

23. Симетралите на внатрешните агли при темињата A и B на $\triangle ABC$ ги сечат спротивните страни соодветно во точките D и E. Во четириаголникот $ABDE$ е впишан ромб така што на секоја страна на четириаголникот се наоѓа точно по едно теме на ромбот. Ако $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$, докажи дека барем еден агол на ромбот не е поголем од $\max\{\alpha, \beta\}$.

Решение. Нека $KLMN$ е ромб со $K \in AB$, $L \in BD$ и $N \in EA$. Да го разгледаме трапезот $PQRS$, $P, Q \in AB$, $PQ \parallel RS$ и

$$\measuredangle PQR = \measuredangle QPS = \measuredangle KNM = \varphi$$

таков што K, L, M, N се на PQ, QR, RS, SP, соодветно. Нека $\varphi > \alpha, \beta$. Тогаш R и S лежат надвор од $\triangle ABC$.



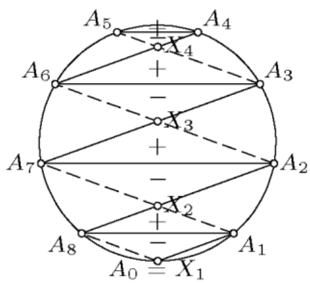
Бидејќи $\measuredangle SNM = \measuredangle 180^\circ - \varphi - \measuredangle NMS = \measuredangle RML$ и $\measuredangle LRM = \measuredangle MSN$ триаголниците LRM и MSN се складни, па затоа $\overline{LR} = \overline{MS}$. Слично, ако Q' е точка на AB таква што $\measuredangle LQ'B = \varphi$, тогаш $\triangle LRM \cong \triangle KQ'L$, па затоа $\overline{MR} = \overline{LQ'}$ $= \overline{LQ}$. Според тоа, $\overline{RQ} = \overline{RL} + \overline{LQ} = \overline{SM} + \overline{MR} = \overline{RS}$.

Сега, $d(R, AB) = \overline{RQ} \sin\varphi > \overline{RS} \sin\alpha > d(R, AC)$ и слично $d(S, AB) > d(S, BC)$, што значи дека точките R и S лежат соодветно над правите AD и BE, т.е.

во полурамнините во кои е C. Оттука следува дека двете точки лежат над правата DE. Последното не е можно, бидејќи RS и DE се сечат во M.

24. Нека $A_0, A_1, ..., A_{2k}$, во овој редослед, се точки од кружница, кои кружницата ја делат $2k+1$ еднакви лаци. Точката A_0 е поврзана со тетиви со сите останати точки. Овие $2k$ тетиви го делат кругот на $2k+1$ делови, кои наизменично се обоени со црвена и сина боја, така што бројот на црвените делови е за еден поголем од бројот на сините делови. Докажи дека плоштината на сината површина е поголема од плоштината на црвената површина.

Решение. За $j = 1, 2, ..., 2k+1$, $j-$тиот дел P_j се состои од триаголникот $A_0A_{j-1}A_j$, каде $A_{2k+1} = A_0$, и кружен отсечок со плоштина S со централен агол $\frac{2\pi}{2k+1}$. Според тоа,



$$\begin{aligned} P_{2i-1} - P_{2i} &= P_{A_0A_{2i-2}A_{2i-1}} - P_{A_0A_{2i-1}A_{2i}} \\ &= P_{A_{i-1}A_iA_{2k+2-i}} - P_{A_{i-1}A_iA_{2k+1-i}} \\ &= P_{X_iA_{i-1}A_{2k+2-i}} - P_{X_iA_iA_{2k+1-i}} \\ &= P_{X_iA_{i-1}A_{2k+2-i}} - P_{X_{i+1}A_iA_{2k+1-i}}, \end{aligned}$$

каде $X_i = A_{i-1}A_{2k+1-i} \cap A_iA_{2k+2-i}$. Со собирање за $i = 1, 2, ..., k$ добиваме

$$D = P_1 - P_2 + ... + P_{2k-1} - P_{2k} + P_{2k+1} = S - P_{X_kA_kA_{k+1}}.$$

Ако тангентите на кружницата во точките A_k и A_{k+1} се сечат во точката T, тогаш $S < P_{TA_kA_{k+1}} = P_{X_kA_kA_{k+1}}$. Значи, $D < 0$, што и требаше да се докаже.

25. Нека M, N, P се произволни точки редоследно на страните BC, CA, AB на остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека е точно барем едно од неравенствата

$$\overline{NP} \geq \frac{1}{2}\overline{BC}, \quad \overline{PM} \geq \frac{1}{2}\overline{CA}, \quad \overline{MN} \geq \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Решение. Да претпоставиме дека тврдењето не е точно за некои M, N, P. Нека A_1, B_1, C_1 се соодветно средините на страните BC, CA, AB. Нека

$$x = \overline{BM} - \overline{BA_1}, y = \overline{CN} - \overline{CB_1}, z = \overline{AP} - \overline{AC_1}.$$

Должината на проекцијата NP на B_1C_1 е еднаква на $p_a = \overline{B_1C_1} + z\cos B - y\cos C$, па од $p_a \leq \overline{NP} < \overline{B_1C_1}$ следува $\frac{z}{\cos C} < \frac{y}{\cos B}$. Аналогно се докажува $\frac{y}{\cos B} < \frac{x}{\cos A}$ и $\frac{x}{\cos A} < \frac{z}{\cos C}$, што не е можно.