Од музике до таласа

мр Сузана Симић, **Крагујевац**

> *Why do rhythms and melodies, which are composed of sound, resemble the feelings, while this is not the case for tastes, colours or smells? Can it be because they are motions, as actions are also motions? Energy itself belongs to feeling and creates feeling. But tastes and colours do not act in the same way.*
>
> Aristotle, Prob. xix. 29

Моћ музике је разнолика и људи реагују на музику на различите начине. Покушајмо да опишемо оно што чујемо. Можемо рећи да је музика непрекидан низ звучних таласа, али то је и гребање по табли ноктима, што ипак нећемо назвати музиком.

Када се притисне дирка клавира, чекић удара жицу и одмах се враћа, дозвољавајући жици да вибрира и производи звук, све док је дирка слободна, а онда се активира пригушивач. Висина тона зависи од тежине жице, затегнутости, дебљине, ... Слушајући неки музички комад, искусни слушалац може да чује тон скоро одмах. Дакле, питање је можемо ли да запишемо то што чујемо или уопштеније да ли можемо да дамо неку репрезентацију произвољног сигнала?

Хајде да пођемо од једноставијег примера. Пример сигнала је реченица. Извором сигнала сматраћемо онога који изговара реченицу. Тај сигнал се кодира, на пример писањем реченице на табли или папиру. Информација коју реченица садржи се тако може преносити до примаоца који није био присутан када је говорник реченицу изговарао и записивао. Он најпре декодира (прочита) сигнал, а затим прима, односно репродукује, полазну информацију (схвата смисао реченице). У овом примеру, извесне информације које извор сигнала шаље нису доступне примаоцу, нпр. боја гласа говорника, његов нагласак, ... Можемо рећи да је запис реченице на табли једна од могућих репрезентација сигнала. У зависности од циља „обраде“ конкретног сигнала, долазимо до његових различитих репрезентација, које су прикладне у већој или у мањој мери. Али, запис на табли је прикладнији од говора када се ради о математичким формулама, нпр. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Наведени пример наговештава да свака репрезентација сигнала има своје предности и мане, односно, поједине информације су невидљиве, недоступне у извесној репрезентацији, а транспарентне у некој другој репрезентацији. Заједничко је да једноставнијим деловима ми описујемо сигнал, у овом случају, словима ми градимо реченице.

Вратимо се сада на неко музичко дело. Нека је f музички комад. Реалној промењљивој x доделићемо вредност $f(x)$, што као физичка величина може да представља амплитуду вибрације мембране микрофона. Стога, f описује временско понашање сигнала и можда бисмо могли да опазимо неке ритмичке обрасце музике. Видимо да описујући музику (као код реченица и говора), ми чујемо више од онога што смо описали. У сваком тренутку ухо опажа која фреквенција чини звук, распознаје њихову јачину и чак је способно да групише одређене фреквенције заједно и разликује различите инструменте. Оваквим описивањем музике, ми сигурно не бисмо могли да одредимо мелодију музике или њихове тонове, висине звука. Потребно је да утврдимо фреквенцијски спектар функције f, тј. нађемо њену Fourier-ову трансформацију

$$\widehat{f}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\omega}dx, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

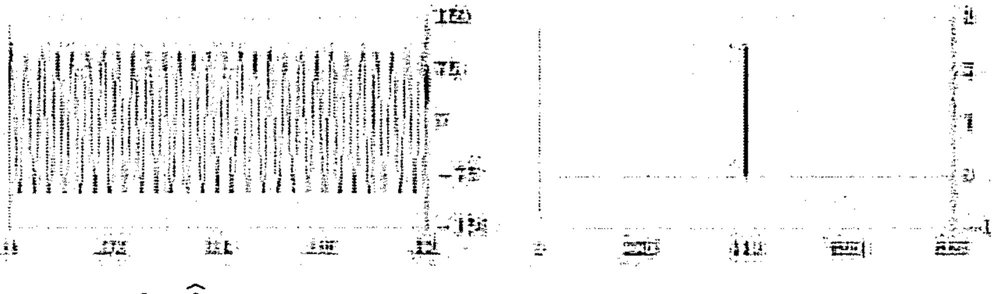
Фреквенцијски садржај сигнала се одређује помоћу Fourier-ове анализе. У есеју „Аналитичка теорија топлоте“ објављеном 1822. године, Joseph Fourier је развио теорију коју данас зовемо Fourier-ова анализа. Суштина је да функцију представимо као суму синусних и косинусних таласа различитих фреквенција и амплитуда и познајући њихова понашања добијемо информације и о самој функцији.

Дуго година је Fourier-ова анализа била главни алат у обради сигнала. Сигнал је физичка величина која се мења у простору, времену или у зависности од неке друге величине. Ако сигнал зависи од времена, његов график ће бити представљен у координатном систему време-амплитуда, где x-оса означава време, а y-оса амплитуду, тј. вредност представљене физичке величине у датом временском тренутку. Међутим, да би се утврдила брзина промене неке физичке величине, сигнал се записује у фреквенцијском домену, тј. у координатном систему фреквенција-амплитуда. График тада показује са којим интезитетом се свака фреквенција појављује у сигналу. Fourier је 1807. године поставио тврђење да се свака довољно глатка функција може представити Fourier-овим редом $f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, тј. као збир њене средње вредности и хармоника различите фреквенције k. Ако су по апсолутној вредности већи коефицијенти уз синусоиде малих периода, тј. великих фреквенција, онда је и сам сигнал врло променљив (осцилаторан). Ако доминирају коефицијенти уз синусоиде великих периода, тј. малих фреквенција, онда се и сам сигнал споро мења (мало осцилује у односу на средњу вредност).

Важне информације о сигналу даје његов фреквенцијски спектар, који је одређен Fourier-овим коефицијентима. Спектар указује на променљивост посматране величине, а преко Parseval-ове једнакости у облику

$$(\text{енергија}_f)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2),$$

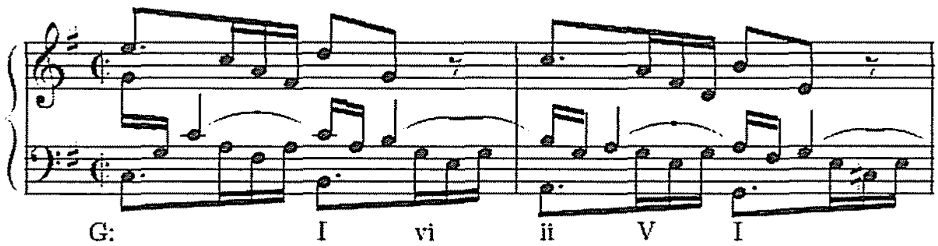
о енергији сигнала. Дакле, укупна енергија сигнала једнака је укупној енергији у његовом спектру. На следећој слици приказан је график чистог тона, 440Hz, на коначном интервалу (слика лево) и график његовог Fourier-овог спектра (слика десно).



Видимо да су f и $\widehat{f}$ две различите, еквивалентне репрезентације једног истог музичког комада. Дакле, свака од њих садржи исте информације, али чини видљивим и прихватљивим прилично различите особине. Са $\widehat{f}$ ћемо моћи да препознамо тон музике, али ни ритам, ни мелодија неће бити очигледни, видљиви. Обе ове репрезентације садрже све могуће информације, али ниједна не даје оне релевантне, оне које се могу чути.

Ако занемаримо то да је препознавање мелодије, ритма и количине звука у складу са различитим процесима у мозгу и зависи од учења, рећи ћемо овако: ухо опажа сигнал f, обрађује га у репрезентацију која обезбеђује истовремено информације о времену и фреквенцији коју ми називамо музика. Циљ временско-фреквенцијске анализе је, дакле, наћи репрезентацију која имитира наше ухо. Идеална репрезентација сигнала ће давати информације о фреквенцији ω која се јавља у неком датом тренутку x, тј. да комбинује особине које су нам приказивале f и $\widehat{f}$.

У пракси су композитори решили овај проблем симболичком временско-фреквенцијском репрезентацијом, тј. нотним системом.



Тако композитор прецизно одређује која нота треба да се свира у ком тренутку и на ком инструменту. Хоризонтално је временско понашање, а вертикално је фреквенцијски спектар.

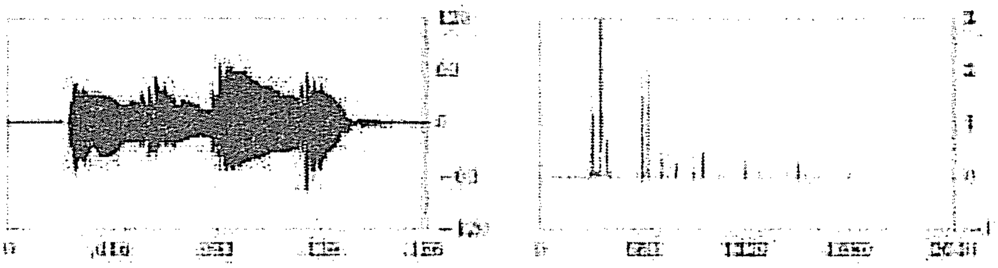
Горе наведени примери, а посебно нотни систем, су корисне аналогије за илустровање неколико других концепта временско-фреквенцијске анализе.

1. Писање нотног система своди се на анализу сигнала f у терминима временских и фреквенцијских информација. Обратно, свирањем музике вршимо синтезу или реконструкцију оригинала f из његове временско-фреквенцијске репрезентације.

2. Нота је мали, невидљиви део, атом, музике. Искусан слушалац може да записује одређену композицију. Ако пожели да је сам изведе и у неком тренутку произведе тон који није пријатан за наше уши, он брисањем одређене ноте неће променити композицију коју изводи и само они искусни музичари ће приметити разлику. Дакле, то је и наш задатак. Потребно је неким функцијама, које ћемо звати временско-фреквенцијским атомима, представити сигнал, а да притом те функције буду такве да се брисањем одређених сам сигнал не мења, или боље рећи мало промени само за стручњаке у тим областима.

3. Зашто нотни систем није та репрезентација за којом трагамо? Сам сигнал узет је као функција из бесконачно-димензионалног простора, а нотни систем садржи једино коначну количину информација. Дакле, нотни систем и музика нису у 1-1 коресподенцији.

Иако је Fourier-ова анализа једна од главних алатки у обради сигнала, ипак има бројне недостатке првенствено јер није погодна за уочавање брзих промена у фреквенцијском садржају звука. Те брзе промене се јављају нпр. при преласцима између нота. Fourier-овом анализом могуће је утврдити фреквенцијски садржај појединачних нота, али не и анализирати неколико нота у одговарајућем музичком делу. На следећим графицима је забележено свирања нота E_4, F_4, G_4 и A_4 на клавиру и спектар овог музичког комада, респективно.



Видимо да је спектар мешавина спекта појединачних нота. Другим речима, ако посматрамо неки музички комад који садржи неколико ритмова и ако се нпр. нота ℓa појављује једном, Fourier-ова анализа ће нам дати одговарајуће фреквенције са тачно одређеним амплитудама и фазама, али неће локализовати ℓa у времену. Очигледно је да током овог музичког комада постоје тренуци у којима се ℓa не чује. Међутим Fourier-ова репрезентација је математички ипак коректна јер фазе нота у близини ноте ℓa су груписане тако да ослабе ову ноту ако се не чује и да је појачају ако се чује. Зато је пожељно користити мешовиту дефиницију сигнала, тј. одређеном броју фреквенција које су присутне, дајући јачину и боју сигналу (онако како чујемо), придружити одговарајући део времена који дефинише временске интервале у којима се дата нота јавља.

Циљ временско-фреквенцијске анализе је да информације функције f и њене Fourier-ове трансформације комбинује у једној репрезентацији, тј. да истовремено опише временско и спектрално понашање функције или сигнала f.

Утврђено је да идеална репрезентација која ће у датом тренутку одредити одговарајућу фреквенцију не постоји. Математичари су утврдили велики број неједнакости које при томе морају бити задовољене, до којих нас доводи тзв. принцип неодређености, немогућност познавања комплементарних парова. Дакле, што прецизније одредимо време, више не можемо говорити о тачно одређеној фреквенцији, и обрнуто.

Због неограниченог трајања синусоиде, Fourier-ова анализа није погодна за обраду сигнала чији се фреквенцијски садржај мења са временом. Идеја је да се такав сигнал подели на мање временске сегменте који садрже скоро стационарне делове сигнала и онда анализира фреквенцијски садржај сваког појединог дела. Метода која се заснива на овој идеји назива се краткотрајна Fourier-ова трансформација или STFT- Short time Fourier transformation.

Дељење функције на интервале се врши помоћу тзв. прозорске функције. Један од најпростијих избора прозорске функције је карактеристична функција интервала

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1). \end{cases}$$

Читава теорија временско-фреквенцијске анализе је изграђена на краткотрајној Fourier-овој трансформацији, јер се већина других репрезентација може изразити у терминима краткотрајне Fourier-ове трансформације. Главни недостатак овог приступа је константна „дужина прозора“. Погодније би било користити „ужи прозор“ у делу где је сигнал јако променљив, а „шири прозор“ у делу где се сигнал споро мења.

Најбоља репрезентација сигнала се постиже функцијама $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{x-b}{a})$, тзв. таласићима. Ова функција је названа таласом због своје осцилаторне природе, а малим таласом или таласићем због ограниченог трајања. Параметром a се скупља и шири, а параметром b се помера дуж временске осе. На тај начин она се креће по сигналу и даје нам све потребне информације. Најчешће су коришћени дискретни таласићи где су вредности параметра a и b степени броја 2. Да бисмо прецизније схватили шта представљају ове функције и како репрезентују дати сигнал вратимо се опет на почетни музички комад. Замислимо да је основни талас четвртина ноте C. Мењањем параметра b у основном таласу добијамо исту ноту одсвирану у одговарајућим временским тренуцима. Ако се параметар a удвостручи, добијамо осмину ноте C, тј. за октаву више од полазне ноте, а ако преполовимо параметар a, добијамо половину ноте C, тј. у једној октави ниже у односу на полазну ноту.

Таласићима, под условом да не занемаримо ниједан коефицијент различит од нуле, можемо потпуно реконструисати полазни сигнал. Циљ истраживача у различитим областима је да одреде функције које ће задовољавати сва одређена својства да би биле таласићи, а да притом тај избор таласића продукује мале коефицијенте који се могу занемарити без велике промене сигнала после синтезе. Смањењем броја података омогућава се њихов ефикасан пренос на даљину, складиштење и брзо претраживање базе сигнала.

Велики успех у примени алгоритама који су засновани на теорији таласића, сматра се прихватање њихове употребе у компресији снимака отисака прстију који чине картотеку ФБИ. Дневно ФБИ добија и до 40 000 захтева за идентификацију отисака који се траже у картотеци. Картотека садржи преко 200 000 000 отисака који су складиштени као компјутерски фајлови. При резолуцији од 500 пиксела по инчу (26 mm) просечна картица има 10 мегабајта података. Дневна количина података преко модема би се преносила сатима. Користећи малоталасну технику врши се компресија података о отисцима прстију у размери 1 : 20. Разлику између оригиналне и декомпресоване слике уочавају само експерти. На тај начин се фајл од 10 мегабајта компримује на 500 килобајта.

Још већи успех је постигнут у отклањању шума код аудио сигнала. Немачки композитор Johanes Brams је 1889. године уживо изводио један од својих мађарских плесова. Снимак је забележен на воштаном цилиндру који се временом делимично истопио. Стандардима заснованим на теорији таласића је успешно „оживљен“ неупотребљив снимак. Примена таласића за отклањање шума није ограничена само на аудио сигнале, него и за уклањање белог шума нпр. са фотографија снимљених помоћу сателита.

Видели смо да је сама теорија таласића од велике примене. Можемо се сусрести са различитим алгоритмима заснованим на овој теорији у областима као што су обрада сигнала, комуникације (компресија), компјутерска графика (узастопно рендерисање), компјутерска визија, нумеричке методе, итд. док су неки конкретни примери њихове примене компресија отисака, лоцирање и предвиђање земљотреса, проучавање удаљених галаксија, анализа и компресија медицинских сигнала, контрола квалитета анализом звучног сигнала.

Највећи значај теорије таласића је њихова употреба у најразличитијим областима и на тај начин су стручњаци који се баве, на први поглед, неповезаним теоријама, проговорили истим језиком.

Joseph Fourier

Јозеф Фурије је рођен 21. марта 1768. у Оксеру (Auxerre) у Француској, а умро 16. маја 1830. у Паризу. Његов отац је био кројач у Оксеру. После смрти прве жене, са којом је имао троје деце, поново се оженио и Фурије је био девето од дванаесторо деце из другог брака. Мајка му је умрла када је имао девет година, а отац наредне године. Његов први сусрет са школом је био у Палаису. Тамо је студирао латински и француски и показао се као веома перспективан ученик. Школовање је наставио у „Ecole Royale Militaire" у Оксеру, где је на почетку показао интересовање и таленат за књижевност, али је веома брзо (већ са 13 година) математика постала његово главно интересовање. Са 14 година је завршио студију о Безуовом „Course de mathematiques". Године 1783. је добио прву награду и то за студију о Базуовој „Mecanique en general". Убрзо затим Фурије одлучује да крене у школу за свештенике, али је доста тога указивало да јако жели да оствари велики утицај на математику. У једном писму је написао: „Јуче је био мој 21. рођендан. У тим годинама Њутн и Паскал су већ оставили велики број бесмртних тврђења." Фурије није положио верску заклетву. Одлази у Париз и чита документ о алгебарским једначинама на „Academic Royale des Sciences". Године 1790. постаје учитељ на Бенедиктовом колеџу „Ecole Royale Militaire of Auxerre" на којем је раније и студирао. Убрзо постаје и политички активан, а због својих политичких ставова бива и ухапшен и затворен. Предложен је 1794. године за студије на „Ecole Normale" у Паризу. Школа је отворена у јануару 1795. и Фурије је био један од најспособнијих ученика. Био је Лагранжов ученик, он га је описао као „првог међу свим Европљанима у науци", Лапласов, који га је мало мање ценио, и Монжов, који га је описао следећим речима: „има јак глас, веома је активан, генијалан и веома учен". Фурије је почео да предаје на француском колеџу и, одржавајући добре односе са Лагранжом, Лапласом и Монжом, почео даља математичка истраживања. Због својих политичких ставова, од којих није одступао, опет је ухапшен и затворен. Његовом ослобађању су допринеле молбе његових ученика, молбе Лагранжа, Лапласа, Монжа, али и промена политичке климе. Наследио је 1797. године Лагранжа на катедри за анализу и механику. Године 1789. Фурије се придружио Наполеоновој војсци у инвазији на Египат као научни сарадник. Помогао је при подизању образовних институција у Египту и управљао сређивањем научних и литерарних открића. Много времена је провео у раду на „Опису Египта", који није завршен до 1810. године када је Наполеон направио измене потребне за издавање. Док је био у Гроноблеу, Фурије је урадио важан математички рад о теорији топлоте. Сада су те белешке јако цењене, али у то време комисија је била незадовољна овим радом. Прва замерка, коју су дали Лагранж и Лаплас, је била Фуријево проширење функције као тригонометријског реда (што ми данас називамо Фуријеовим редовима). Друга замерка је била на рачун порекла једначине о преносу топлоте. Допунио је своје белешке радом на тему хлађења бесконачних чврстих честица и земљане и зрачне топлоте. Комисија је тада одлучила да додели награду Фуријеу. Постао је члан Академије наука 1817. године, а убрзо и секретар математичког одељења. Академија је 1822. године издала његов награђени есеј „Theorie analytique de la chaleur". Током својих последњих осам година у Паризу, обновио је своја математичка истраживања и објавио бројне белешке, неке о чистој математици а неке о примени математике. Комплетан Фуријеов рад је послужио као подстрек каснијим радовима о тригонометријским редовима и теорији функција са реалним променљивима.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година