Šefket Arslanagić (Trebinje)

JEDAN NAČIN ODREĐIVANJA EKSTREMNIH (NAJVEĆIH I NAJMANJIH) VRIJEDNOSTI NEKIH FUNKCIJA

Vrlo često u praksi pred nas se postavlja zadatak kako da utvrdimo pod kojim uslovima proizvod dvije pozitivne promjenljive veličine, čiji je zbir konstantan (stalan), dostiže svoju maksimalnu (najveću) vrijednost, a pod kojim uslovima zbir dvije pozitivne promjenljive veličine, čiji je proizvod konstantan, dostiže svoju minimalnu (najmanju) vrijednost.

O tome nam govore sljedeće dvije teoreme.

Teorema 1. Proizvod dvije promjenljive pozitivne veličine čiji je je zbir konstantan dostiže svoju maksimalnu vrijednost kada je apsolutna vrijednost njihove razlike moguće najmanja.

Dokaz. Neka su u i v dvije pozitivne promjenljive veličine čiji je zbir konstantan i jednak sa $2a$. Iz poznatog identiteta

$$(u+v)^2-(u-v)^2=4uv \tag{1}$$

(čija se tačnost lako utvrđuje) i uslova $u+v=2a$ imamo:

$$uv=a^2-\frac{(u-v)^2}{4}.$$

Odatle vidimo da je proizvod promjenljivih veličina u i v, uz navedene uslove, najveći kad je razlomak $\frac{(u-v)^2}{4}$ na desnoj strani jednakosti (2) po mogućnosti najmanji, a do tog dolazi kad je apsolutna vrijednost njihove razlike (koja se obelježava sa $|u-v|$) moguće najmanja.

Posljedica. Proizvod uv dostiže svoj apsolutni maksimum (najveći od svih mogućih maksimuma) kada je $u-v=0$, tj. kada je $u=v$, ako je, s obzirom na značenje promjenljivih u i v, to moguće.

Primjer 1. Od svih pravougaonika zadanog obima $2s$ neka se odredi onaj čija je površina P najveća.

Označimo sa x i y stranice pravougaonika. Imamo:

$$2(x+y)=2s,\ x+y=s\ (=\text{const.}),\ y=s-x;$$

$$P=xy,\ P=x\,(s-x).$$

Da li je u ovom slučaju moguće da bude $x=y$? To je moguće, jer se iz $x=s-x$ dobija $x=\frac{s}{2}$, a iz toga se dobija $y=\frac{s}{2}$.

Prema tome, od svih pravougaonika zadatog obima $2s$ najveću površinu ima kvadrat stranice $\frac{s}{2}$.

Primjer 2. Odrediti onu vrijednost promjenljive x za koju proizvod $y=(3-x^2)\,(11+x^2)$ dostiže svoju najveću vrijednost, imajući u vidu da je zbir činilaca u datom proizvodu stalan.

Zaista, u datom slučaju je $(3-x^2)+(11+x^2)=14$ ($=$const.), te stoga y dostiže svoju najveću vrijednost kada je apsolutna vrijednost razlike $(3-x^2)-(11-x^2)$ moguće najmanja, tj. kada je $|-8-2x^2|=$ $=2x^2+8$ moguće najmanja. Da vidimo da li je moguće da ova vrijednost bude nula.

Iz $2x^2+8=0$ dobija se $x^2=-4$, što je nemoguće ako je x realan broj. Zato, pošto je $2x^2$ uvijek pozitivno, navedena razlika biće najmanja za $x=0$, pa će u tom slučaju promjenljiva y dostići svoju najveću vrijednost i to vrijednost $y=33$.

Teorema 2. Zbir dvije promjenljive veličine, čiji je proizvod konstantan, ima najmanju (minimalnu) vrijednost kada je apsolutna vrijednost njihove razlike moguće najmanja.

Dokaz. Ako su u i v dvije pozitivne promjenljive veličine, takve da je $uv=a^2$ ($=$const.), iz jednakosti (1) dobijamo:

$$(u+v)^2=(u-v)^2+4a^2. \tag{3}$$

Pošto su u i v pozitivne veličine, zbir $u+v$ biće najmanji kada je kvadrat tog zbira $(u+v)^2$ moguće najmanji. No, na osnovu jednakosti (3), ovaj kvadrat biće najmanji ako je $(u-v)^2$ moguće što manje. Zato je vrijednost $u+v$ najmanja onda kada je apsolutna vrijednost razlike $u-v$ (tj. $|u-v|$) moguće najmanja.

Posljedica. Zbir $u+v$ dostiže svoj apsolutni minimum (najmanji od svih minimuma) kada je $u-v=0$, tj. kada je $u=v$, ako je, s obzirom na značenje promjenljivih, to moguće.

Primjer 3. Od svih pravougaonika date površine P odrediti onaj čiji je obim $2s$ najmanji.

Označimo sa x i y stranice pravougaonika. Imamo:

$$xy = P\ (=\text{const.}), \qquad y = \frac{P}{x};$$

$$2s = 2(x+y), \qquad s = x + y, \qquad s = x + \frac{P}{x}.$$

Da li je moguće, u ovom slučaju, da bude $x - \frac{P}{x} = 0$? To je moguće, jer se iz $x - \frac{P}{x} = 0$ dobija: $x^2 = P$, $x = \sqrt{P}$, a iz toga sljeduje $y = \sqrt{P}$.

Prema tome, od svih pravougaonika iste površine najmanji obim ima kvadrat.

Primjer 4. Odrediti kolika je najmanja vrijednost zbira nekog pozitivnog broja x i njegove recipročne vrijednosti $\frac{1}{x}$ ako razlika tog broja i njegove recipročne vrijednosti ne može iznositi manje od polovine tog broja?

Proizvod traženog broja i njegove recipročne vrijednosti je konstantan i iznosi 1. Ako je pritom $x - \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$, dobivamo da je $x = \sqrt{2}$,

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Zadaci

1. Broj 12 rastaviti na dva sabirka tako da njihov proizvod bude što je moguće veći.

2. Broj 12 rastaviti na dva činioca tako da je njihov zbir što je moguće manji.

3. Od svih pravougaonika sa datom dijagonalom d naći onaj koji ima najveću površinu.

4. Od svih pravougaonika sa datom površinom naći onaj koji ima najmanju dijagonalu.

5. Za koju vrijednost promjenljive x dostiže $y = x^3\ (2 - x^3)$ svoju najveću vrijednost?

6. Za koju vrijednost promjenljive x dostiže $y = a + x + \frac{a^2}{a+x}$ svoju najmanju vrijednost?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија