XXIV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Должините на страните на триаголникот ABC се $54mm$, $39mm$ и $47mm$, а должините на страните на триаголникот KLM се $8cm$, $4cm$ и $5cm$. Кој од нив има поголема обиколка?

Решение. Обиколката на триаголникот ABC е

$$54+39+47=140\,mm=14\,cm,$$

а обиколката на триаголникот KLM е

$$8+4+5=17\,cm.$$

Значи, триаголникот KLM има поголема обиколка.

Задача 2. Во камион со носивост $5t$ натоварени се 68 вреќи по $50kg$ брашно. Уште колку такви вреќи можат да се натоварат во камионот?

Решение. Во камионот можат да се натоварат 5000:50=100 вреќи по $50kg$ брашно. Значи, можат да се натоварат уште 100–68=32 такви вреќи.

Задача 3. Една круша има маса колку две праски. Една праска има маса колку осум сливи. Колку сливи имаат маса колку една круша?

Решение. Ако една праска има маса колку осум сливи тогаш две праски ќе имаат маса колку $2\cdot 8=16$ сливи . Бидејќи една круша има маса колку две праски, а две праски имаат маса колку 16 сливи, заклучуваме дека една круша има маса колку 16 сливи.

Задача 4. Три другари, Марко, Гоце и Даме, добиле на Бинго 1000000 денари. Ако при купувањето на ливчето Марко дал 15 денари, Гоце 16 денари и Даме 19 денари, како трите другари правилно ќе ја поделат добивката?

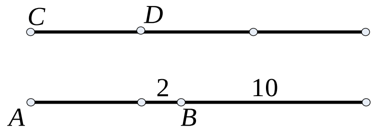
Решение. Ливчето за играта Бинго чини $15+16+19=50$ денари. Тогаш за еден вложен денар при купувањето на ливчето, се добиваат

$$1000000:50=20000 \text{ денари.}$$

Значи Марко ќе добие $15\cdot 20000=300000$ денари, Гоце $16\cdot 20000=320000$ денари и Даме $19\cdot 20000=380000$ денари .

Задача 5. Должината на отсечката AB е за $2cm$ поголема од должината на отсечката CD. Ако должината на отсечката CD се зголеми 3 пати, а должината на отсечката AB се зголеми за 10cm, ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD?

Решение. Од цртежот е јасно дека кога отсечката CD ќе ја зголемиме 3 пати, тогаш сме ја зголемиле за 2 нејзини должини и тоа зголемување е $2+10=12cm$. Значи,



$$\overline{CD}=12:2=6\,cm \text{ и } \overline{AB}=6+2=8\,cm\,.$$

V одделение

Задача 1. Растојанието меѓу телефонските столбови на една улица долга 1600m било 80m. Заради одредена потреба, тие биле разместени така што новото растојание помеѓу столбовите е 50m. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?

Решение. Бидејќи $NZS(80,50)=400$, добиваме дека неразместени столбови ќе бидат оние кои се на првото место и на секои 400 m. Значи, вкупно неразместени столбови ќе има $1+1600:400=5$.

Задача 2. Најди го бројот на сите трицифрени броеви кои се деливи со 15 и чиј збир на цифри е помал или еднаков на 9.

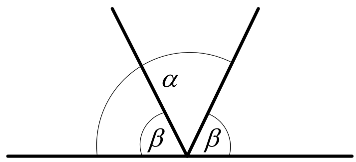
Решение. Од условот во задачата, следува дека 3 е делител на $\overline{abc}$ и 5 е делител на $\overline{abc}$, односно 3 е делител на $a+b+c$ и $c\in\{0,5\}$. Од вториот услов $a+b+c\le 9$, добиваме дека ги бараме трицифрените броеви кои завршуваат на 0 или 5, а збирот на нивните цифри е 3, 6 или 9 . Ако $c=0$ ги добиваме следниве броеви: 120, 210, 300, 150, 510, 240, 420, 330, 600, 180, 810, 270, 720, 360, 630, 450, 540 и 900 . Ако $c=5$ ги добиваме броевите: 105, 135, 225, 315 и 405. Значи, вкупно 23 броеви ги исполнуваат условите во задачата.

Задача 3. Правоаголник со плоштина $99cm^2$ има ширина 9cm. Пресметај ја плоштината на квадратот чиј периметар е еднаков на периметарот на дадениот правоаголник.

Решение. Ако плоштината на правоаголникот е $99cm^2$, а ширината 9cm тогаш должината на правоаголникот е $99:9=11cm$. Периметарот на правоаголникот е $L=2\cdot 9+2\cdot 11=40cm$. Тогаш, периметарот на квадратот е 40*cm*, а неговата страна има должина $40:4=10cm$. Конечно, плоштината на квадратот е $P=10^2=100cm^2$.

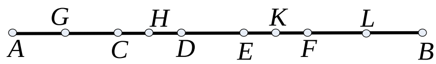
Задача 4. Разликата на аголот α и неговиот напореден агол β е 56°. Пресметај го комплементниот агол γ на аголот β.

Решение. Нека α и β се напоредни агли кои го задоволуваат условот во задачата. Ако ја конструираме разликата α−β како на цртежот, следува β+(α−β)+β=180°. Значи, 2β+56°=180°, а оттука β=(180°−56°):2=62°. Тогаш γ=90°−62°=28°.



Задача 5. На отсечката *AB* се распоредени точките: *C*, *D*, *E*, *F* во дадениот редослед, така што $\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}$. Растојанието меѓу средишните точки на отсечките *CD* и *EF* е 12 *cm*, а растојанието меѓу средишните точки на отсечките *AC* и *FB* е 23 *cm*. Најди ја должината на отсечката *AB*.

Решение. Нека *G*, *H*, *K*, *L* се средишни точки на отсечките *AC*, *CD*, *EF*, *FB*, соодветно (види цртеж).



Бидејќи $\overline{CD}=\overline{EF}$, следува дека $\overline{CH}=\overline{EK}$ а оттука $\overline{HD}+\overline{EK}=\overline{CD}=\overline{DE}$. Тогаш имаме $12=\overline{HD}+\overline{DE}+\overline{EK}=2\overline{DE}$, па $\overline{DE}=6\,cm$. Оттука, добиваме $\overline{CF}=3\overline{DE}=18\,cm$. Од друга страна,

$$\overline{GL}=\overline{GC}+\overline{CF}+\overline{FL}, \text{ а } \overline{GC}=\overline{AG}=\frac{\overline{AC}}{2} \text{ и } \overline{FL}=\overline{LB}=\frac{\overline{FB}}{2},$$

па имаме $23=\frac{\overline{AC}}{2}+18+\frac{\overline{FB}}{2}$. Од последното равенство добиваме дека $\frac{\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{FB}}{2}=5\,cm$. Според тоа

$$\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{GL}+\overline{LB}=\frac{\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{FB}}{2}+\overline{GL}=5+23=28\,cm.$$

VI одделение

Задача 1. Во едно училиште од вкупниот број ученици 58% се момчиња. Колку биле момчиња, а колку девојчиња ако бројот на момчиња и девојчиња се разликува за 72? Колку вкупно ученици имало тоа училиште?

Решение. Со x да го означиме вкупниот број на ученици во тоа училиште. Од условот во задачата имаме $\frac{58-42}{100}x=72$, а оттука $x=450$. Значи имало вкупно 450 ученици во училиштето и тоа $\frac{58}{100}\cdot 450=261$ момчиња и $450-261=189$ девојчиња.

Задача 2. Колку е $\frac{31}{71}$ од бројот

$$\frac{1-\frac{1}{3}:(2+\frac{1}{6})}{3\frac{2}{5}+\frac{10-\frac{1}{4}}{3}:\frac{5}{8}}\cdot 8\frac{3}{5}-\frac{1,5:\frac{15}{4}\cdot 2,5+\frac{3}{5-\frac{2}{3}}}{1+\frac{1}{7}+\frac{6}{\frac{12}{11}\cdot(\frac{8}{3}-\frac{7}{4})\cdot 7}}\ ?$$

Решение. Да ја пресметаме прво вредноста на дадениот израз. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{1-\frac{1}{3}:(2+\frac{1}{6})}{3\frac{2}{5}+\frac{10-\frac{1}{4}}{3}:\frac{5}{8}}\cdot 8\frac{3}{5}-\frac{1,5:\frac{15}{4}\cdot 2,5+\frac{3}{5-\frac{2}{3}}}{1+\frac{1}{7}+\frac{6}{\frac{12}{11}\cdot(\frac{8}{3}-\frac{7}{4})\cdot 7}} &= \frac{1-\frac{1}{3}:\frac{13}{6}}{\frac{17}{5}+\frac{\frac{39}{4}}{3}\cdot\frac{8}{5}}\cdot\frac{43}{5}-\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{\frac{13}{3}}}{\frac{8}{7}+\frac{6}{\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot 7}}\\ &=\frac{1-\frac{2}{13}}{\frac{17}{5}+\frac{13}{4}\cdot\frac{8}{5}}\cdot\frac{43}{5}-\frac{1+\frac{9}{13}}{\frac{8}{7}+\frac{6}{7}}\\ &=\frac{\frac{11}{13}}{\frac{17}{5}+\frac{26}{5}}\cdot\frac{43}{5}-\frac{\frac{22}{13}}{\frac{14}{7}}\\ &=\frac{5\cdot 11}{13\cdot 43}\cdot\frac{43}{5}-\frac{11}{13}=0.\end{aligned}$$

Конечно, $\frac{31}{71}$ од 0 е 0 .

Задача 3. Мајстор и чирак треба да направат од бетон една плоча со димензии $4m$, $3m$ и $20cm$ како и 4 оградни ѕидови со димензии $20cm$, $3m$ и $25cm$. Мајсторот му рекол на чиракот да пресмета и да го нарача точното количество потребен бетон. Чиракот пресметал дека треба да нарача $30m^3$ бетон. Дали чиракот згрешил во пресметката?

Решение. Потребниот бетон за да се направи плоча со димензии $4m$, $3m$ и $20cm$ е $4\cdot 3\cdot 0,2=2,4m^3$, а за 4 ѕидови со димензии $20cm$, $3m$ и $25cm$ е $4\cdot 0,2\cdot 3\cdot 0,25=0,6m^3$. Значи вкупно се потребни $3m^3$ бетон, односно чиракот згрешил во пресметката.

Задача 4. Во еден триаголник разликата на двата внатрешни агли α и β е еднаква на трикратната вредност на третиот агол γ. Докажи дека $\alpha-\gamma=90^\circ$.

Решение. Од условот имаме

$$\alpha-\beta=3\gamma \text{ и } \beta=180^{o}-\alpha-\gamma$$

од каде што

$$3\gamma=\alpha-(180^{o}-\alpha-\gamma)=2\alpha+\gamma-180^{o},$$

а оттука $2\alpha-2\gamma=180^{o}$, односно $\alpha-\gamma=90^{\circ}$.

Задача 5. Докажи дека меѓу било кои 5 природни броеви кои не се деливи со 3, може да се најдат 3 броеви чиј збир е делив со 3.

Решение. Бидејќи петте броеви не се деливи со 3, за нив важи дека при делење со 3 даваат остаток 1 или 2. Тогаш барем три од нив при делење со 3 имаат ист остаток**.** Значи, тие три броеви може да ги означиме со $3k+1$, $3m+1$ и $3n+1$ или со $3k+2$, $3m+2$ и $3n+2$. Тогаш

$$3k+1+3m+1+3n+1=3(k+m+n+1)$$

или

$$3k+2+3m+2+3n+2=3(k+m+n+2)\ .$$

Значи, и во двата случаи нивниот збир е број делив со 3.

VII одделение

Задача 1. Кружниот лак над основата на рамнокрак триаголник е $\frac{2}{5}$ од опишаната кружница на тој триаголник. Најди ги аглите на тој триаголник.

Решение. Централниот агол над основата е $\frac{2}{5}\cdot 360^{\circ}=144^{\circ}$. Тогаш аголот на триаголникот спроти основата е 72^{o} , а аглите на основата се $\frac{180-72}{2}=54^{\circ}$.

Задача 2. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x^4-2005x^3+2005x^2-x}{x-1}$ за $x=2005$.

Решение.Да го упростиме изразот $A(x)=\frac{x^4-2005x^3+2005x^2-x}{x-1}$. Имаме:

$$A(x)=\frac{(x^4-x)-2005x^2(x-1)}{x-1}=\frac{x(x^3-1)-2005x^2(x-1)}{x-1}$$
$$=\frac{(x-1)[x(x^2+x+1)-2005x^2]}{x-1}=x^3+x^2+x-2005x^2$$

Тогаш

$$A(2005)=2005^3+2005^2+2005-2005^3=2005(2005+1)=4022030$$

Задача 3. Двоцифрен број собран со бројот запишан со истите цифри, но во обратен ред дава број кој е квадрат на некој природен број. Најди ги сите такви двоцифрени броеви.

Решение.Нека $\overline{ab}$ е бараниот број. Од условот добиваме

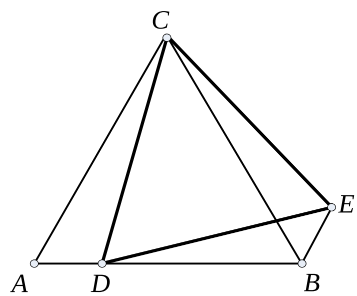
$$10a+b+10b+a=n^2, \quad n\in\mathbb{N}$$

од каде што $11(a+b)=n^2$. Бидејќи $a+b<19$, следува дека $a+b=11$, односно $\overline{ab}\in\{29,38,47,56,65,74,83,92\}$.

Задача 4. Нека *D* е произволна точка на страната *AB* од рамностраниот триаголник *ABC*. Нека *E* е точка таква што триаголникот *CDE* е рамностран и притоа точките *B* и *E* се на иста страна од правата *CD*. Докажи дека четириаголникот *DBEC* е тетивен.

Решение. Бидејќи $\measuredangle ECD=60^\circ$, за да докажеме дека четириаголникот *DBEC* е тетивен доволно е да докажеме дека $\measuredangle DBE=120^\circ$. Триаголниците *ADC* и *BEC* се складни бидејќи $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{DC}=\overline{EC}$ и

$$\begin{aligned}\measuredangle ACD&=60^\circ-\measuredangle DCB\\&=\measuredangle DCE-\measuredangle DCB\\&=\measuredangle BCE.\end{aligned}$$



Од нивната складност добиваме $\measuredangle EBC=\measuredangle DAC=60^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle DBE=\measuredangle DBC+\measuredangle EBC=60^\circ+60^\circ=120^\circ.$$

Задача 5. Најди ги сите двоцифрени броеви *x* за кои две од следниве тврдења се вистинити, а две невистинити:

1) *x* е делив со 5;

2) *x* е делив со 23;

3) *x*+7 е квадрат на некој природен број;

4) *x*–10 е квадрат на некој природен број.

Решение. Множествата кои соодветствуваат на тврдењата 1) – 4) се: За 1) тоа е множеството

$$A=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95\},$$

за 2) множеството

$$B=\{23,46,69,92\},$$

за 3) множеството

$C=\{18,29,42,57,74,93\}$ и

за 4) множеството

$D=\{11,14,19,26,35,46,59,74,91\}$.

Тогаш

$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $A\cap D=\{35\}$, $B\cap C=\varnothing$, $B\cap D=\{46\}$, $C\cap D=\{74\}$.

Од $A\cap D=\{35\}$ и $35\notin B$, и $35\notin C$ заклучуваме дека 35 е број за кој се точни тврдењата 1) и 4), а неточни тврдењата 2) и 3). Од $B\cap D=\{46\}$ и $46\notin A$, и $46\notin C$ заклучуваме дека 46 е број за кој се точни тврдењата 2) и 4), а неточни тврдењата 1) и 3). Од $C\cap D=\{74\}$ и $74\notin A$ и $74\notin B$ заклучуваме дека 74 е број за кој се точни тврдењата 3) и 4), а неточни тврдењата 1) и 2). Значи бараните двоцифрени броеви се 35, 46 и 74.

VIII одделение

Задача 1. Од 3 децилитри сируп против кашлица, кој содржел 10% дестилирана вода, аптекарката подготвила сируп за дете, кој требало да содржи 40% вода. Колку децилитри вода ставила во трите децилитри сируп?

Решение.Со x да го означиме количеството вода (изразено во децилитри) што аптекарката го ставила во трите децилитри сируп. Тогаш, според условите во задачата, ја добиваме равенката $\frac{10}{100}\cdot 3+x=\frac{40}{100}(3+x)$. Таа е еквивалентна со $3+10x=12+4x,\ 6x=9$, а оттука $x=1,5dl$.

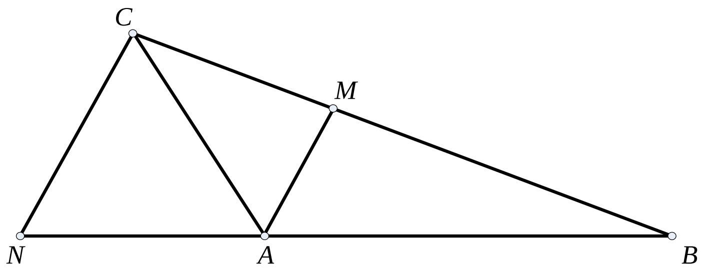
Задача 2. Три професори напишале збирка задачи по математика и го разделиле хонорарот во однос 8:6:5. Ако хонорарот бил разделен во однос 7:5:4, тогаш еден од професорите би добил 250 денари повеќе отколку што добил при првата поделба. По колку денари добил секој од авторите?

Решение. Нека вкупниот хонорар што го добиле тројцата професори е x денари. Тогаш првиот професор добил $\frac{8}{19}x$ денари, вториот $\frac{6}{19}x$ денари и третиот $\frac{5}{19}x$ денари . Ако хонорарот се раздели во однос 7:5:4, тогаш првиот би добил $\frac{7}{16}x$, вториот $\frac{5}{16}x$ и третиот $\frac{4}{16}x$ денари . Бидејќи $\frac{8}{19}<\frac{7}{16}$, $\frac{6}{19}>\frac{5}{16}$ и $\frac{5}{19}>\frac{4}{16}$, следува дека при втората поделба првиот професор би добил 250 денари повеќе отколку при првата поделба , односно

$\frac{7}{16}x-\frac{8}{19}x=250$). Оттука, x=15200 . Значи, првиот професор добил 6400 денари, вториот 4800 денари и третиот 4000 денари .

Задача 3. Ако должините на две страни на еден триаголник се 6*cm* и 12*cm*, а аголот меѓу нив е 120°, колкава е должината на симетралата на тој агол?

Решение. Нека *AM* е симетралата на $\measuredangle BAC=120^{\circ}$ (види цртеж). Тогаш

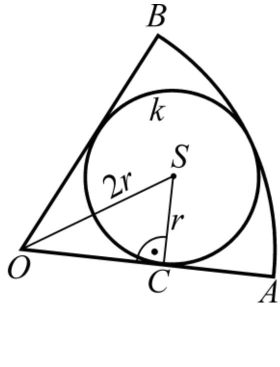


$\measuredangle BAM=\measuredangle MAC=60^{\circ}$. Нека *N* е точка на продолжението на страната *AB* така што $\overline{AN}=\overline{AC}=6cm$. Бидејќи $\measuredangle NAC=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$ следува дека триаголникот *NAC* е рамностран. Тогаш од $\measuredangle CNA=\measuredangle MAB=60^{\circ}$ добиваме дека *CN* и *MA* се паралелни отсечки. Со примена на Талесовата теорема за пропорционални отсечки добиваме дека $\overline{AM}:\overline{NC}=\overline{AB}:\overline{NB}$ од каде што следува дека

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{NC}}{\overline{NB}}=\frac{12\cdot 6}{6+12}=4cm.$$

Задача 4. Круг е впишан во кружен исечок (кругот ги допира двата радиуси и лакот на исечокот). Радиусот на исечокот е 3 пати поголем од радиусот на кругот. Најди го односот на плоштините на исечокот и кругот.

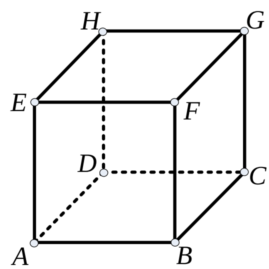
Решение. Кругот $k(S,\ r)$ е впишан во кружниот исечок *AOB* и затоа *S* лежи на симетралата на аголот *AOB* . Нека *C* е точката во која $k(S,r)$ го допира радиусот *OA*. Тогаш триаголникот *OCS* е правоаголен, а од условот во задачата имаме $\overline{OS}=2r$. Бидејќи хипотенузата на триаголникот *OCS* е два пати поголема од катетата *SC* ($\overline{OS}=2r$, $\overline{SC}=r$), следува дека аголот *COS* е агол од 30° .



Тогаш $\measuredangle AOB = 60^\circ$ и затоа плоштината на кружниот исечок AOB е $P_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ}(3r)^2\pi = \frac{3}{2}r^2\pi$. Плоштината на кругот $k(S, r)$ е $P_2 = r^2\pi$, па тогаш $\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{2}$.

Задача 5. На секоја од шесте страни на една коцка е запишан по еден природен број. На секое теме го запишуваме производот на трите броеви кои се запишани на страните кои го имаат соодветното теме за заедничко. Ако збирот на броевите запишани на темињата е 2006, пресметај го збирот на броевите запишани на страните.

Решение. Да ја означиме коцката со $ABCDEFGH$. Нека на страната $ABCD$ е запишан бројот a_1, на страната $EFGH$ бројот a_2, на $ABFE$ b_1, на $DCGH$ b_2, на $BCGF$ c_1 и на $ADHE$ c_2. Тогаш кај темето A е запишан бројот $a_1b_1c_2$, кај B бројот $a_1b_1c_1$, кај C бројот $a_1b_2c_1$, кај D бројот $a_1b_2c_2$, кај E бројот $a_2b_1c_2$, кај F бројот $a_2b_1c_1$, кај G бројот $a_2b_2c_1$ и кај H бројот $a_2b_2c_2$. Тогаш, од условот во задачата важи



$$a_1b_1c_2 + a_1b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 = 2006.$$

Изразот од левата страна во последното равенство ќе го трансформираме во

$$\begin{aligned}
a_1b_1c_2 + a_1b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 &= \\
= a_1b_1(c_2+c_1) + a_1b_2(c_1+c_2) + a_2b_1(c_2+c_1) + a_2b_2(c_1+c_2)& \\
= (c_1+c_2)(a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2)& \\
= (c_1+c_2)(a_1(b_1+b_2) + a_2(b_1+b_2))& \\
= (c_1+c_2)(b_1+b_2)(a_1+a_2).&
\end{aligned}$$

Значи,

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) = 2006 = 1\cdot 2\cdot 17\cdot 59.$$

Бидејќи $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ се природни броеви, следува дека

$a_1 + a_2 > 1, b_1 + b_2 > 1$ и $c_1 + c_2 > 1$

и затоа, без губење на општоста, можеме да земеме дека

$$a_1 + a_2 = 2, b_1 + b_2 = 17, c_1 + c_2 = 59.$$

Тогаш

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 2 + 17 + 59 = 78.$$