Сојузен натпревар 1972

Седмо одделение

1. Членовите на математичката секција во едно училиште се договориле за време на празникот Нова година секој од нив да напише по една разгледница на секој од преостанатите членови. Вкупно биле напишани 342 разгледници. Колку членови имала математичката секција во ова училиште?

   Решение. Нека секцијата има n ленови. Секој член напишал $n-1$ разгледница, што значи дека сите заедно пратиле $n(n-1)$ разгледници. Имаме

   $$n(n-1)=342, \text{ т.е. } n(n-1)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 19=19\cdot 18,$$

   од каде наоѓаме $n=19$. Значи, секцијата имала 19 членови.

2. На писмената работа по математика првата задача не ја решиле 12% од учениците, 32% делимично ја решиле задачата, а остатокот од 14 ученици точно ја решиле задачата. Колку ученици имало во ова одделение?

   Решение. Бројот на учениците кои точно ја решиле задача изнесува $100\%-(32\%+12\%)=56\%$ од вкупниот број ученици. Значи, ако во одделението имало x ученици, тогаш $0,56x=14$, од каде добиваме $x=25$.

3. Упрости го изразот:

   $$A=[(4a+5b)^2]^2-[(4a-5b)^2]^2-160ab(4a-5b)^2.$$

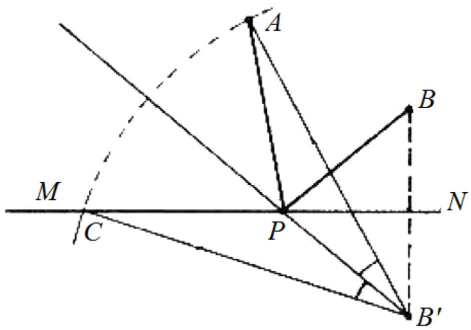
   Направи проверка за $a=1, b=-2$.

   Решение. Имаме:

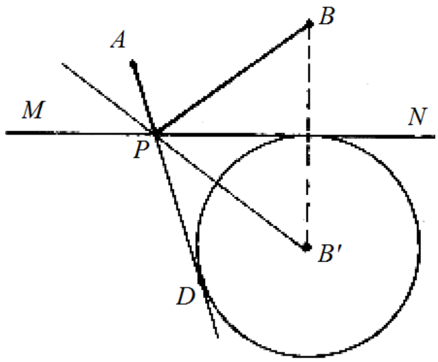
   $$\begin{aligned}A&=[(4a+5b)^2]^2-[(4a-5b)^2]^2-160ab(4a-5b)^2\\&=((4a+5b)^2-(4a-5b)^2)((4a+5b)^2+(4a-5b)^2)-160ab(4a-5b)^2\\&=8a\cdot 10b(16a^2+40ab+25b^2+16a^2-40ab+25b^2)-160ab(4a-5b)^2\\&=160ab(16a^2+25b^2)-160ab(16a^2-40ab+25b^2)\\&=160ab(16a^2+25b^2-16a^2+40ab-25b^2)\\&=160ab\cdot 40ab=6400a^2b^2.\end{aligned}$$

4. Дадени се права MN и точки A и B на иста страна од таа права. На дадената права определи точка P така што $\measuredangle MPA = 2\measuredangle NPB$.

Решение. *Прв начин*. Конструираме точка B' симетрична на точката B во однос на правата MN и на правата MN определуваме точка C таква што $B'A = B'C$ (цртеж десно). Ја конструирама симетралата на $\measuredangle CB'A$ и во пресек со правата MN ја определуваме точката P, која е бараната точка. На читателот му препуштаме да ја докаже исправноста на оваа конструкција и да изврши дискусија за бројот на решенијата.



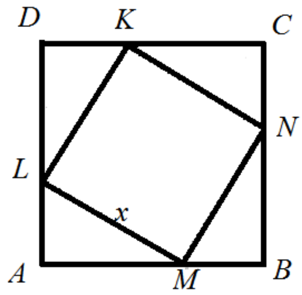
Втор начин. Како и во првиот начин на решавање конструираме точка B' симетрична на B во однос на правата MN. Потоа конструираме кружница $k(B', \frac{BB'}{2})$ и конструираме тангента AD на k од точката A (види цртеж). Нека правите MN и AD се сечат во точката P. Тогаш P е бараната точка. На читателот му препуштаме да ја докаже исправноста на оваа конструкција и да изврши дискусија за бројот на решенијата.



5. Во квадрат со страна a впишан е друг квадрат чии темиња лежат на страните на првиот квадрат, но така што страните на дадениот и впишаниот квадрат формираат агли од 30°. Колкав дел од плоштината на дадениот квадрат покрива плоштината на впишаниот квадрат? Изрази го овој однос во проценти.

Решение. Нека x е должината на страната на впишпаниот квадрат (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle LMA = 30^\circ$, правоаголниот триаголник е половина од рамностран триаголник со должина на страна $LM = x$. Оттука следува дека $AL = \frac{x}{2}$ и $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Според тоа, должината на страната на почетниот квадрат е



$$AB = AM + MB = AM + AL$$

$$= \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Значи,

$$P_{KLMN} = x^2 \text{ и}$$

$$P_{ABCD} = \frac{x^2(\sqrt{3}+1)^2}{4} = \frac{x^2(2+\sqrt{3})}{2}.$$

Според тоа,

$$P_{KLMN} : P_{ABCD} = x^2 : \frac{x^2(2+\sqrt{3})}{2} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2(2-\sqrt{3}).$$

Значи

$$P_{KLMN} = 2(2-\sqrt{3})P_{ABCD} \approx 0,535898 P_{ABCD}.$$

Со други зборови плоштината на впишаниот квадрат е приближно 53,5898% од плоштината на почетниот квадрат.

Осмо одделение

1. Во празните полиња на дадената табела запиши броеви така што збирот на било кои три последователни полиња, како хоризонтално, така и вертикално, е еднаков на 12.

	5						
					1		
6							
			2				

Решение. Нека a,b,c,d се четири последователни броеви запишани во еден ред (колона) на табелата. Според условот $a+b+c=b+c+d$, па затоа $a=d$. Значи во секој ред (колона) по две прескокнати полиња се повторува бројот од првото поле. Ако ова го примениме на редовите ја добиваме табелата:

	5			5			5
		1			1		
6			6			6	
2			2			2	

Сега, ако на добиената табела истото правило го примениме на колоните, ја добиваме табелата:

2	5		2	5		2	5
		1			1		
6			6			6	
2	5		2	5		2	5

Преостанатите броеви ги определуваме од условот збирот на броевите запишани во секои три последователни полиња во ред (колона) да е еднаков на 12. Така ја добиваме дабелата:

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

2. Хеликоптер и авион истовремено полетале во пресрет еден кон друг. До моментот на средбата хеликоптерот прелетал $100\,km$ помалку од авионот и на местото на полетување на авионот хеликоптерот стигнал 3 часа по средбата. Авионот стигнал на местото на полетување на хеликоптерот 1 час и 20 минути по средбата. Определи ги брзините на хеликоптерот и авионот и растојанието меѓу местата на полетување.

Решение. Нека хеликоптеротт до средбата прелетал $x\,km$. Тогаш авионот до средбата прелетал $(x+100)\,km$. Брзината на хиликоптерот е $\frac{x+100}{3}\,km/h$, а брзината на авионот е $\frac{x}{1\frac{1}{3}}\,km/h$. Ов слоето место на полетување до средбата хеликоптерот летал $x:\frac{x+100}{3}=\frac{3x}{x+100}$ часа, а од своето место на полетување до средбата авионот летал $\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x}$ часа. Тие до средбата летале исто време, па затоа

$$\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x}=\frac{3x}{x+100}\text{, т.е. }\left(\frac{x+100}{x}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Оттука, бидејќи $\frac{9}{4}=(\frac{3}{2})^2=(-\frac{3}{2})^2$, добиваме

$$\frac{x+100}{x}=\frac{3}{2}\text{ или }\frac{x+100}{x}=-\frac{3}{2}.$$

Но, $\frac{x+100}{x}>0$, па затоа $\frac{x+100}{x}=\frac{3}{2}$, од каде добиваме $x=200\,km$.

Значи, хеликоптеро прелетал $200\,km$, авионот прелетал $300\,km$, брзината на хеликоптерот е $100\,km/h$, а на авионот е $150\,km/h$. Растојанието меѓу местата на полетување е $500\,km$.

3. Бригата трактористи треба да изора две ниви, такви што плоштината на едната нива е двапати поголема од плоштината на другата нива. Првиот ден сите трактористи ја орале првата нива. Вториот ден половина од бригадата го довршила орањето на првата (поголема) нива, а втората половина од бригадата ја орала другата нива. Втората половина од бригадата не можела за еден ден да ја изора втората нива, па за да се заврши нејзиното орање еден тракторист морал да ора уште два дена. Колку трактористи имало во бригадата? (Се претпоставува дека сите трактористи работата под исти услови и имаат иста продуктивност.)

Решение. Нека во бригадата има x трактористи. Од условите на задачата следува дека за орање на првата нива се потребни $x+\frac{x}{2}$ работни денови на еден тракторист, а за орање на втората нива се потребни $\frac{x}{2}+2$ работни денови на еден тракторист. Сега, бидејќи првата нива е двапати поголема од втората нива добиваме

$$x+\frac{x}{2}=2(\frac{x}{2}+2),$$

од каде наоѓаме $x=8$. Значи, бригата броела 8 трактористи.

4. Конвексен шестаголник $ABCDEF$ е составен од рамнокрак трапез $ACDF$ и два рамнокраки триаголници ABC и FDE со еднакви висини ($h=12\,cm$). Ако $AB=15\,cm$, $AF=25\,cm$ и $FE=20\,cm$, конструирај го шестаголникот во размер 1:5 и пресметај ја неговата плоштина.

Решение. Со примена на Питагоровата теорема, лесно се добива дека

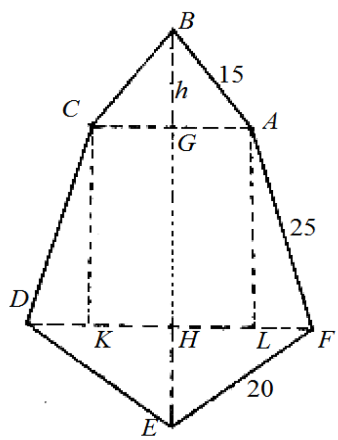
$$AG=9\,cm,\ FH=16\,cm.$$

Сеега, $FL=7\,cm$, па повторно од Питагоровата теорема следува $AL=24\,cm$.

Според тоа, плоштината на дадениот шестаголник е еднаква на

$$\begin{aligned}P&=P_{ABC}+P_{DFAC}+P_{DFE}\\&=9\cdot12+16\cdot12+(16+9)\cdot24\\&=900\,cm^2.\end{aligned}$$

На читателот, според дадените и добиените податоци му препуштаме самостојно да го конструиран шестаголникот.



5. Дадена е права правилна еднакворабна тристрана призма чија основа има плоштина $6,25\sqrt{3}\ cm^2$.

а) Пресметај го работ на дадената призма.

б) Определи го односот на волумените на опишаниот и впишаниот цилиндар на оваа призма. Дали овој однос е еднаков за секоја права правилна еднакворабна тристрана призма?

Решение. а) Од $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=6,25\sqrt{3}$ добиваме $a=5cm$.

б) Радиусот на впишаниот цилиндар е $r=\frac{1}{3}h$, а радиусот на опишаниот цилиндар е $R=\frac{2}{3}h=2r$, каде h е висината на основата. Разгледуваните цилиндри се со еднакви висини, па затоа

$$V_1:V_2=R^2\pi H:r^2\pi H,$$

т.е.

$$V_1:V_2=R^2:r^2=(2r)^2:r^2=4:1,$$

каде V_1 е волуменот на опишаниот, а V_2 е волуменот на впишаниот цилиндар. Значи, за сите вакви призми односнот на разгледуваните волумени е константен.