EVOLVENTA (JAMTK) 1(1) (2018), 21–27

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://www.umtk.info

Kretanje tačke u ravni

Adisa Tanović[a]

[a] *Profesor matematike, student II ciklusa studija Matematika*

Sažetak: Problemi kretanja su oduvijek intrigirali obične ljude i fascinirali naučnike među njima. Zamislimo samo kako je bilo naučnicima srednjeg vijeka da posmatrajući sa Zemlje otkriju pravila kretanja planeta sunčevog sistema. Ponekad olako shvatamo šta je to kretanje tačke, a time dolazimo i u neočekivane situacije. U ovom radu probat ćemo odgonetnuti jedno takvo kretanje, kružno kretanje tačke u ravni. Proračuni i slike u ovom radu su rađeni u GeoGebri.

1. Uvod

U narednom tekstu upoznat ćemo se sa pojmovima putanja, kretanja, kretanja tačke kao i vizualizirati neke od tih primjera u *geogebri*. Za početak ćemo definisati osnove pojmove.

Definicija 1.1. *Putanja ili trajektorija je kriva po kojoj se kreće materijalna tačka ili središte mase nekog tijela. U opštem slučaju to može biti bilo kakva prostorna kriva.*

Ukoliko jednačina putanje nije unaprijed poznata, može se odrediti tako da se iz jednačine zakona puta eliminira vrijeme. Evo najjednostavnijeg mogućeg primjera: neka je zakon puta neke tačke $x = t$. Ova jednačina govori da se tačka nakon n sekundi pomakla za n metara po pravcu x. Putanja te tačke je očito sam pravac x. Uzmimo samo malo složeniji primjer: neka je zakon puta dat izrazima $x = t$, $y = t$. Kada izjednačimo t u obje jednačine, dobijamo jednačinu putanje $y = x$. Na isti se način jednačinu putanje raznim matematičkim manipulacijama može dobiti i za mnogo složenije izraze zakona puta u bilo kakvom koordinatnom sistemu.

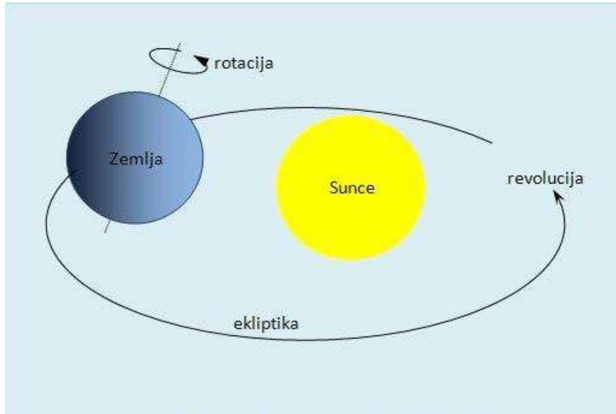
Definicija 1.2. *Kretanje (u fizici) je promjena položaja nekog tijela u odnosu na neko drugo tijelo. Kretanje je glavna osobina materije i sva materija u prirodi se nalazi u stalnom kretanju.*

2. Primjeri putanja iz prirode

Primjer 1. *Putanja planete Zemlje.*

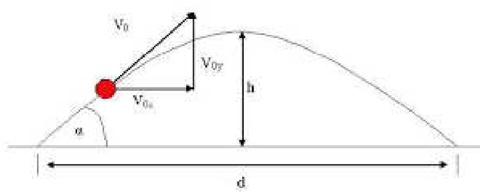
Zemlja se okreće oko Sunca po trećem Keplerovom zakonu. Na tom putu oko Sunca Zemlja se istovremeno okreće i oko svoje ose. Načini 365 takvih obrtaja ili rotacija dok jednom obiđe Sunce. Ali osa oko koje se Zemlja rotira ne stoji pod pravim uglom u odnosu na ravan putanje već je malo nagnuta. Putanja po kojoj se Zemlja kreće zove se *ekliptika*. Ali sve ovo mi drugačije doživljavamo. Nama izgleda da se Sunce kreće, a da Zemlja ustvari miruje. Kada hodamo pravo nekom ulicom, da li je naša putanja prava linija ili je to ipak neka kriva s obzirom da je Zemlja geoid?

Ciljna skupina: srednja škola
Prezentovano na: Zimska škola matematike 2016
Rad preuzet: 12.12.2017.
Email adresa: adisa 223@hotmail.com (Adisa Tanović)



Primjer 2. *Kosi hitac.*

Kosi hitac je kretanje tijela bačenog početnom brzinom pod određenim uglom. Ugao pod kojim je tijelo bačeno zove se ugao elevacije. Putanja je parabola s tjemenom na vrhu.



Primjer 3. *Slobodan pad.*

Posmatrajmo tijelo pušteno da slobodno pada s neke visine. Kretanje tog tijela naziva se slobodan pad. Dakle slobodan pad je kretanje tijela isključivo pod uticajem sile teže. Putanja koju opisuje kretanje tijela prilikom slobodnog pada idealizirano je prava linija.

3. Putanja tačaka kružnice

Primjer 4.

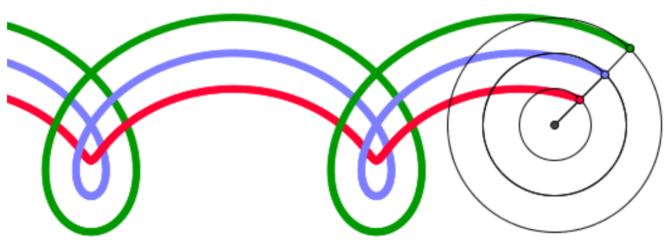
Posmatrajmo dva koncentrična kruga odnosno jedan krug je sadržan u drugom i imaju zajednički centar. Možemo reći da ta dva kruga formiraju točak. Postavlja se pitanje, pri kretanju točka, u kojem će odnosu biti dužine putanja ta dva kruga. Kretanje manjeg kruga je uslovljeno kretanjem većeg. Ako se veći krug počinje kotrljati, takvo kretanje bi primoralo kretanje i manjeg kruga. Veći krug ima putanju jednaku svom obimu, odnosno on se tokom kretanja okrenuo tačno jedanput. Manji krug, krećući se zajedno sa većim, se takođe okrene samo jedanput i završava kretanje.

Problem je u tome što dužina puta koji je je prešao manji krug nije jednaka njegovom obimu, već je jednaka obimu većeg kruga. Kako je moguće da se krug manjeg obima okrene samo jednom, (dakle pređe svoj obim) a dužina njegovog puta je jednaka većem krugu? Kako je moguće da put manjeg kruga, koji bi trebao da bude manji, prelazi veću dužinu od svog obima, odnosno prelazi istu putanju kao i veliki krug? Kako to da prilikom "razmotavanja" malog i velikog kruga dobijamo jednaku putanju? Šta će se desiti ako imamo više koncentričnih krugova,odnosno svaki je sadržan u onom prethodnom?

Ovaj "problem" poznat je pod nazivom *Aristotelov paradoks točka.*
Međutim kako smo došli do nečega što intuitivno znamo da ne može biti tačno? Odgovor na to pitanje, a ujedno i "rješenje" gore navednog problema je što smo zanemarili stvarnu putanju tačaka kružnice. Gore navedeno nije stvarna putanja koja opisuje kretanje tačaka kružnice. Stvarna putanja tačaka je opisana sljedećom krivom.

Definicija 3.1. *Cikloida je kriva koju opisuje putanju tačke kružnice kada se kružnica kotrlja po pravcu.*

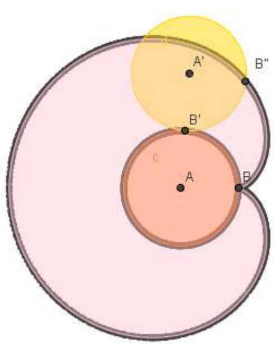
Ako posmatramo tri tačke (na slici ispod: crvena, plava i zelena) koje se nalaze na tri kružnice različitih poluprečnika, vidimo šta je stvarna putanja tih tačaka.



Primjer 5. *Kardioida.*

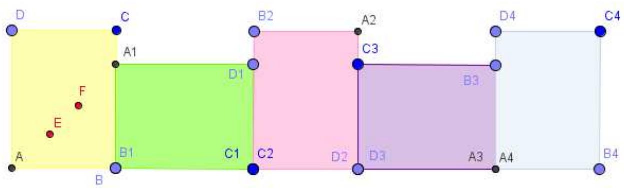
Ovo je jedan od primjera zanimljive krive, odnostno putanje koju obrazuje tačka na kružnici, dok se kružnica kreće. Uvedimo taj pojam i formalno.

Definicija 3.2. *Kardioida je dobila ime po Grčkoj riječ "kardio" što znači "srce". Kardioida je kriva koja nastaje kretanjem tačke na kružnici koja se kotrlja oko fiksnog kruga.*



4. Zadatak

PROBLEM : Zamislimo da moramo pomjeriti ogromnu pravouglu ciglu na nekoj određenoj udaljenosti u nekoliko ponovljenih prevrtanja. Cigla je četri metra duga, a tri metra široka, dok sve ivice međusobno zaklapaju ugao od 90°. Prevrtanje se vrši oko tačke tjemena. Mi u ovom slučaju imamo rotaciju cigle, a ujedno i svih tačaka na njoj, oko jednog od četiri tjemena cigle. Sljedeća slika pokazuje početnu poziciju cigle koja je prikazana u dvije dimenzije, gdje je prednja strana pravougaonik i označena je tačakama A, B, C i D. Nakon prvog prevrtanja sljedeće oznake tačaka su A_1, B_1, C_1, D_1 i krajnja pozicija će biti A_4, B_4, C_4, D_4, nakon četiri prevrtanja. Na cigli su definisane i dvije tačke na prednjoj strani cigle, gdje se tačka E nalazi jedan metar iznad zemlje i jedan metar od lijevog ugla i druga tačka se nalazili dva metra od zemlje i dva metra od lijevog ugla.

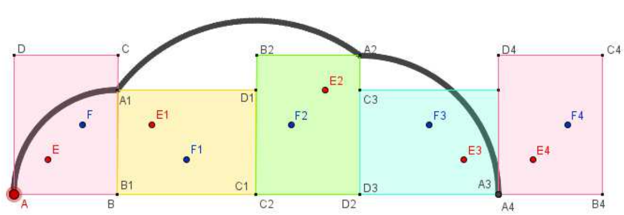


Nakon prevrtanja četiri puta svih šest tačaka A, B, C, D, E i F su formirale određene putanje na određenoj krivoj. Označit ćemo putanje tačaka A, B, C, D, E, F respektivno sa a, b, c, d, e i f. Postavlja se pitanje u kojem su odnosu putanje ovih tačaka?

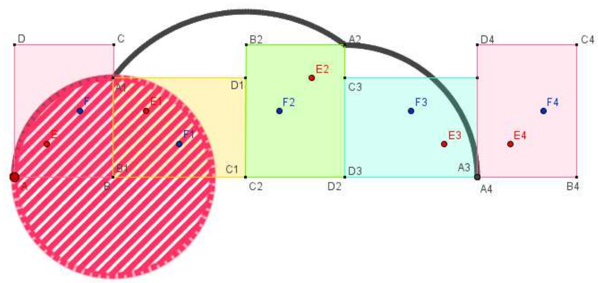
Prevrtanje te cigle je u matematičkom smislu rotacija.

Definicija 4.1. *Rotacija je kružno kretanje objekta oko centra (ili tačke) rotacije.*

Pošto su sve stranice cigle, jedna u odnosu na drugu, pod uglom od 90°, tako je i rotacija cigle jednaka uglu od 90°, a ujedno i svaka tačka na bloku ima istu rotaciju. Pri prevrtanju blokova svaka ivična tačka jednom bude tačka oko koje se rotira cijeli blok. Ukupno imamo 4 rotacije, što znači da svaka tjemena tačka (A, B, C, D) ima po tri rotacije. Rotacija tačke stvara putanju tačke, a šta je kriva po kojoj se tačke kreću? Prvo odredimo šta je putanja tačke A i izračunajmo dužinu putanje te tačke. Sljedeća slika pokazuje putanju posmatrane tačke.



Posmatrajmo sljedeću sliku i uočimo da je putanja tačke A sastavljena iz četvrtina kružnica različitih poluprečnika.



Da bismo izračunali putanju tačke A potrebni su nam poluprečnici kružnica koji su dijelovi putanje. Radijusi kružnica po kojima se kreću tačke su određeni najkraćim rastojanjem između nepomične tačke i tačke (tjemena oko kojeg rotiramo) za koju tražimo radijus. Označimo sa a_1 i izračunajmo dio putanje od tačke A do tačke A_1. Kako je širina cigle jednaka tri, to će na osnovu gore navedenog biti i poluprečnik kruga za posmtarani dio putanje. Obim kruga se računa po formuli $O = 2r\pi$ i kako smo uočili da je dio putanje četvrtina kružnice imamo sljedeće:

$$a_1 = \frac{2r\pi}{4}(r = 3) \Leftrightarrow a_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} \Leftrightarrow a_1 = 4.71 \ .$$

Označimo sa a_2 i izračunajmo sada dio putanje od tačke A_1 do tačke A_2 na isti način kao za a_1. U ovom slučaju poluprečnik posmatranog kruga je dijagonala pravougaonika. Pa imamo sljedeće:

$$a_2 = \frac{2r\pi}{4}(r = 5) \Leftrightarrow a_2 = \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi}{4} \Leftrightarrow a_2 = 7.95 \ .$$

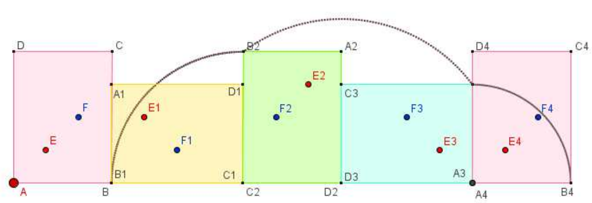
Označimo sa a_3 i izračunajmo sada dio putanje od tačke A_2 do tačke A_3 na već pokazani način. U ovom slučaju poluprečnik posmatranog kruga jednak je 4. Tada imamo sljedeće:

$$a_3 = \frac{2r\pi}{4}(r = 4) \Leftrightarrow a_3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi}{4} \Leftrightarrow a_3 = 6.29 \ .$$

I kako se u četvrtom koraku rotacija vrši oko tjemena A_3, ova tačka ostaje nepomična. Dakle, ukupna dužina putanje tačke A je:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + 0 = 18.94 \ .$$

Posmatrajmo sada putanju tačke B.

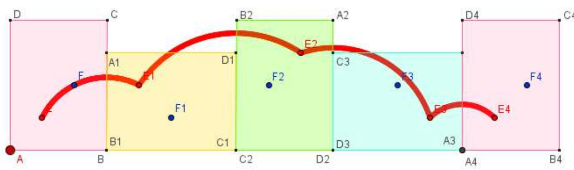


Uočavamo da je putanja tačke B sastavljena od dijelova kružnice i možemo uočiti da su to četvrtine kružnica. Dijelove putanja računamo na identičan način kao za tačku A. Pa imamo sljedeće:

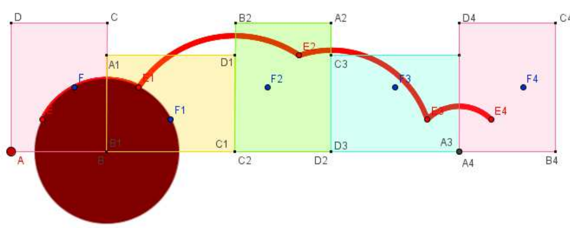
$$b_1 = 6.29 \ , \ b_2 = 7.95 \ , \ b_3 = 4.71 \ .$$

Dakle, ukupna dužina putanje za tačku B iznosi: $b = 18.94$.
Sada možemo zaključiti da će i putanje tačaka C i D biti iste kao i za tačku A i B. Kako imamo tri rotacije

i kako su putanje svaki put četvrtine kružnica različitih poluprečnika, dobijamo da su dužine putanja za tačke C i D iste kao i za A i B. Odnosno, imamo relaciju da za dužine putanja a, b, c i d tačaka A,B,C i D, respektivno, vrijedi $a = b = c = d$.
Ostalo je još samo da odredimo putanje i dužine putanja za tačke E i F. Kako smo rekli, te dvije tačke se nalaze na cigli. Te tačke imaju po četiri rotacije od 90° i njihove putanje su jednake zbiru četiri pojedinačne dužine putanja, pri svakoj rotaciji. Putanja tačke E prikazana je na sljedećoj slici.



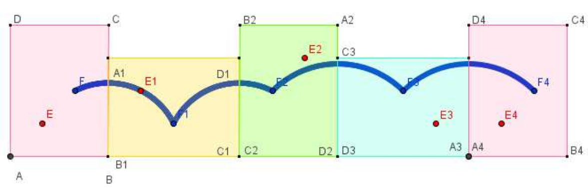
Uočimo da se putanja tačke E također sastoji od četvrtina kružnica određenih poluprečnika.



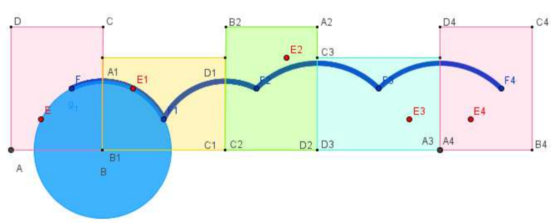
Sada nas zanima dužina putanje za tačku E. Označimo sa e_1 dio putanje od tačke E do E_1, sa e_2 od tačke E_1 do tačke E_2 i tako dalje. Analognim postupkom proračuna dužina putanja dobijamo sljedeće vrijednosti : $e_1 = 3.51, e_2 = 5.68, e_3 = 4.97, e_4 = 2.22$. Pa je ukupna dužina putanje, kako smo već naveli, zbir ovih vrijednosti, odnosno :

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \Leftrightarrow e = 3.51 + 5.68 + 4.97 + 2.22 \Leftrightarrow e = 16.39\ .$$

Na sljedećoj slici prikazana je i putanja tačke F.



Uočimo da se putanja tačke F također sastoji od četvrtina kružnica određenih poluprečnika.



Možemo zaključiti da će tačka F imati sličnu putanju kao i prethodne tačke i analognim postupkom računanja dobijamo da je dužina putanje za tačku F: $f = 15.93$.
Time smo odgovorili na postavljeno pitanje. Zaključili smo šta je putanja tjemena cigle kao i putanje tačaka na njoj. Računanjem istih dolazimo do relacije:

$$a = b = c = d > e > f \ .$$

Napomena:
Sve slike osim prve i sedme urađene su u softwareu GeoGebra, a dobijene su kao dijelovi animacija kretanja pojedinih tačaka.

Literatura

[1] https://bs.wikipedia.org/wiki/Kardioida
[2] https://sl.wikipedia.org/wiki/Cikloida