XXIV олимпијада

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ за кои се исполнети условите

(1) $f(xf(y))=yf(x)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}^{+}$, и

(2) $f(x)\to 0$ кога $x\to+\infty$.

Решение. Ако во релацијата (1) ставиме $y=x$ добиваме дека постојат реални броеви z, такви што $f(z)=z$. На пример, таков е секој број од облик $xf(x)$, $x>0$. Нека z е било кој таков број. Тогаш,

$$f(z^2)=f(zf(z))=zf(z)=z^2,$$

и со индукција се докажува дека

$$f(z^n)=z^n\text{, за секој } n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

За $z\neq 0$, од $z=f(z)=f(1\cdot f(z))=zf(1)$, добиваме $f(1)=1$, па од

$$zf(\tfrac{1}{z})=f(\tfrac{1}{z}f(z))=f(1)=1,$$

следува $f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}$. Сега, повторно со индукција се докажува дека

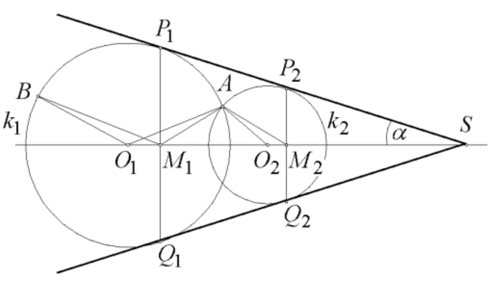
$$f(\tfrac{1}{z^n})=\tfrac{1}{z^n}\text{, за секој } n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Ако $z>1$, тогаш од (2) и (3) следува $0=\infty$, што не е можно. Слично, од (4) следува дека не е можно и $z<1$. Затоа $z=f(z)$, само ако $z=1$. Но, ова својство го има секој број од облик $xf(x)$, па затоа $f(x)=\frac{1}{x}$, за секој $x>0$. Непосредно се проверува дека оваа функција ги има својствата (1) и (2).

2. Во рамнина се дадени две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси и центри O_1 и O_2. Кружниците k_1 и k_2 се сечат и нека A е една нивна пресечна точка. Една од заедничките тангенти ја допира k_1 во P_1 и k_2 во P_2, а другата заедничка тангента ја допира k_1 во Q_1 и k_2 во Q_2. Нека M_1 и M_2 се средини на P_1Q_1 и P_2Q_2, соодветно. Да се докаже дека $\measuredangle O_1AO_2=\measuredangle M_1AM_2$.

Решение. *Прв начин*. Доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle O_1AM_1=\measuredangle O_2AM_2.$$



Нека S е пресекот на заедничките тангенти на кружниците k_1 и k_2 и нека правата SA ја сече кружницата k_1 во уште една точка B. Бидејќи кружниците k_1 и k_2 се хомотетични во однос на S, важи

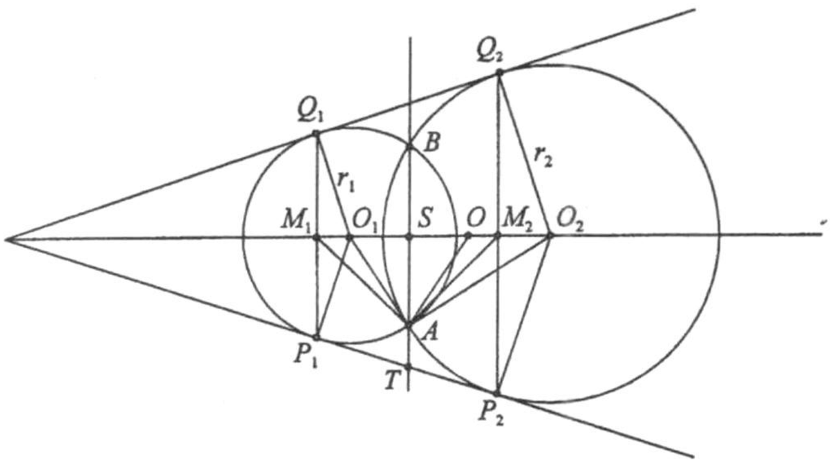
$$\measuredangle O_2AM_2 = \measuredangle O_1BM_1 .$$

Значи, останува да докажеме дека $\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_1BM_1$, а за тоа доволно е да докажеме дека точките A, B, O_1 и M_1 се наоѓаат на една кружница. Последниот услов е исполнет бидејќи

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SP_1} \cdot \overline{SP_1} = \overline{SO_1} \cos\alpha \frac{\overline{SM_1}}{\cos\alpha} = \overline{SO_1} \cdot \overline{SM_1}$$

каде што $\alpha = \measuredangle P_1SO_1$.

Втор начин. Втората пресечна точка на k_1 и k_2 да ја означиме со B (види цртеж). Нека $T = AB \cap P_1P_2$. Од $\overline{TP_1}^2 = \overline{TA} \cdot \overline{TB} = \overline{TP_2}^2$ следува $\overline{TP_1} = \overline{TP_2}$.



Затоа $\overline{SM_1} = \overline{SM_2}$, каде $S = AB \cap O_1O_2$. При осна симетрија во однос на правата AB точката M_1 се пресликува во M_2 и нека O_1 се пресликува во O. Забележуваме дека важи

$$\frac{\overline{O_2M_2}}{\overline{OM_2}} = \frac{\overline{O_2M_2}}{\overline{O_1M_1}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO}} .$$

Сега од теоремата за симетрала на агол следува дека AM_2 е симетрала на $\measuredangle O_2AO$, па затоа

$$\measuredangle O_2AM_2 = \measuredangle M_2AO = \measuredangle M_1AO_1 ,$$

т.е.

$$\measuredangle M_1AM_2 = \measuredangle M_1AO_1 + \measuredangle O_1AM_2 = \measuredangle O_2AM_2 + \measuredangle O_1AM_2 = \measuredangle O_1AO_2 .$$

3. Нека $a, b, c \in \mathbb{N}$ се такви што било кои два се заемно прости. Докажи дека

$$2abc - ab - bc - ca$$

е најголемиот цел број кој не може да се претстави во облик

$$xca + yca + zab$$

каде што x, y, z се ненегативни цели броеви.

Решение. На почеток ќе докажеме дека секој број $n > 2abc - ab - bc - ac$ може да се претстави во облик $n = abz + bcx + acy$, каде x, y и z се природни броеви, а потоа дека бројот $n = 2abc - ab - bc - ac$ не може да се претстави во тој облик.

Нека (x_0, y_0, z_0) е некое целобројно решение на равенката

$$abz + bcx + acy = n,$$

кое сигурно постои за секој цел број n бидејќи

$$\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(b,c) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1.$$

Доволно е да докажеме дека може да се избере ненегативно решение, т.е. такво што $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $z \geq 0$. Со одземање на равенствата добиваме

$$ab(z - z_0) + bc(x - x_0) + ac\,(y - y_0) = 0.$$

Од $\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1$ добиваме $a \mid (x - x_0)$ т.е. $x - x_0 = as$, $s \in \mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме

$$b(z - z_0) + bcs + c(y - y_0) = 0.$$

Од $\mathrm{NZD}(c,a) = 1$ следува $b \mid (y - y_0) = bt$, $t \in \mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $cs + ct + z - z_0 = 0$, т.е. $z - z_0 = -c(s + t)$.

Во релациите $x = x_0 + as$ и $y = y_0 + bt$ броевите s и t можат да се изберат така што $0 \leq x \leq a - 1$ и $0 \leq y \leq b - 1$. Тогаш

$$abz = n - bcx - acy > (2abc - ab - bc - ca) - bc(a - 1) - ca(b - 1) = -ab,$$

од каде што добиваме $z > -1$, т.е. $z \geq 0$. Аналогно се добива и за x и y, со што го докажавме првиот дел од тврдењето.

За да го докажеме вториот дел, претпоставуваме дека

$$2abc - ab - bc - ca = bcx + cay + abz,\ \ x, y, z \geq 0.$$

Тогаш,

$$bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1) = 2abc,$$

при што $x + 1 \geq 1$, $y + 1 \geq 1$, $z + 1 \geq 1$. Од $\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(c,a) = 1$ следува $a \mid (x + 1)$, па затоа $a \leq x + 1$. Слично добиваме $b \leq y + 1$ и $c \leq z + 1$, па според тоа

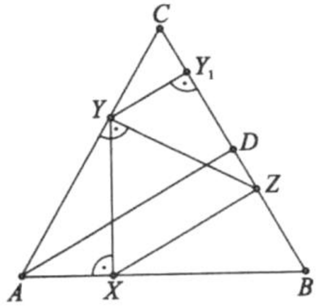
$$bca + cab + abc \leq bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1) = 2abc,$$

т.е. $3abc \leq 2abc$, што не е можно бидејќи a, b, c се природни броеви.

4. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Нека E е множеството од сите точки од отсечките AB, BC и CA (вклучувајќи ги и A, B и C). Дали е точно дека за било која поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества постои

правоаголен триаголник за кој сите три темиња припаѓаат на едно исто од тие подмножества?

Решение. Ќе докажеме дека одговорот на прашањето е позитивен.



Нека X е точка на AB таква што $\overline{AX}:\overline{XB}=1:2$, Y е точка од AC таква што $XY \perp AB$ и Z е точка од BC таква што $YZ \perp AC$ (цртеж десно). Ќе докажеме дека $XZ \perp BC$.

Од $\overline{AY}=2\overline{AX}$ и $\overline{AX}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ следува $\overline{AX}=\overline{YC}$. Значи, $\triangle AXY \cong \triangle CYZ$ (како правоаголни триаголници кај кои една катета е еднаква и аглите во темињата A и C се еднакви). Значи, $\overline{XY}=\overline{YZ}$. Освен тоа, $\measuredangle XYZ = 60^\circ$, па затоа $\triangle XYZ$ е рамностран, т.е. $\overline{XZ}=\overline{XY}$.

Како што покажавме дека $\overline{AX}=\overline{YC}$, аналогно се докажува дека $\overline{ZB}=\overline{YC}$. Сега од $\overline{AX}=\overline{ZB}$, $\overline{XZ}=\overline{XY}$ и $\measuredangle XAY = \measuredangle ZBX = 60^\circ$ следува дека $\triangle AXY \cong \triangle BZX$, па затоа $\measuredangle BZX = \measuredangle AXY = 90^\circ$.

Нека е дадена произвона поделба E, $E = S \cup T$, при што $S \cap T = \varnothing$. Две од точките X, Y, Z припаѓаат на исто подмножество. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $X, Z \in S$. Тогаш, ако постои точка $A_1 \in BC$, таква што $A_1 \in S$ и $A_1 \neq Z$, задачата е решена, затоа што бараниот правоаголен триаголник е XZA_1. Затоа сите точки од отсечката BC (освен Z) нека припаѓаат на T. Ако $Y \in T$, тогаш задачата е решена бидејќи триаголникот YY_1C, каде што Y_1 е проекција на Y врз BC, е правоаголен и $Y, Y_1, C \in T$. Затоа, да претпоставиме дека $Y \in S$. Ако некоја точка $C_1 \in AB$ и $C_1 \neq X$ припаѓа на S, тогаш триаголникот YXC_1 е правоаголен и $Y, X, C_1 \in S$ и задачата е решена. Затоа, да претпоставиме дека сите точки на отсечката AB, освен X, припаѓаат на T. Тогаш триаголникот ABD, каде што D е проекцијата на точката A врз отсечката BC, е правоаголен и $A, B, D \in T$.

5. Докажи го или негирај го тврдењето: Во множеството природни броеви $\{1, 2, 3, ..., 10^5\}$ постои подмножество од 1983 елементи, кое не содржи ниту една тројка броеви кои се последователни членови на некоја аритметичка прогресија.

Решение. Ќе докажеме дека тврдењето во задачата е точно. Со T_n го означуваме множеството природни броеви чиј запис во систем со основа 3 има најмногу n цифри, во кој запис сите цифри се различни од 2. Бројот на елементите на тоа множество е 2^n, а неговиот најголем елемент е

$$\underbrace{11...1}_{n}=3^0+3^1+...+3^{n-1}=\tfrac{1}{2}(3^n-1).$$

Множеството T_n не содржи ниту една аритметичка тројка. Имено, ако $x, y, z \in T_n$ и $2y = x + z$, тогаш записот бројот $2y$ во систем со основа 3 ќе ги содржи само цифрите 0 или 2, а бројот $x+z$ (ако x и y се различни броеви од T_n) мора барем на едно место да има цифра 1.
За $n=11$ добиваме

$$2^{11}=2048>1983,\text{ а } \tfrac{1}{2}(3^{11}-1)=88573<100000.$$

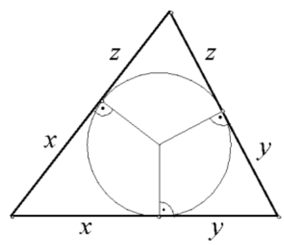
Според тоа, за првите 1983 броеви од множеството T_n тврдењето на задачата е точно.

6. Нека a,b,c се должини на страни на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* За секој триаголник со должини на страни a, b, c секогаш може да се изберат ненегативни броеви x, y, z, такви што $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (цртеж десно). Ако овие равенства ги замениме во даденото неравенство, по средувањето го добиваме еквивалентното неравенство



$$xy^3+yz^3+zx^3\geq xyz(x+y+z). \qquad (1)$$

Последното неравенство следува од неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски за ненегативни реални броеви a_1, a_2, a_3:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

применето на броевите:

$$a_1=\sqrt{z}, a_2=\sqrt{x}, a_3=\sqrt{y} \text{ и } b_1=\sqrt{xy^3}, b_2=\sqrt{yz^3}, b_3=\sqrt{zx^3},$$

при што знак за равенство е исполнет ако и само ако $\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y}$, т.е. ако и само ако $x=y=z$, односно $a=b=c$.

Втор начин. На потполно ист начин како погоре го добиваме неравенството (1), кое е квивалентно на очигледното неравенство

$$(x-z)^2zy+(z-y)^2yx+(y-x)^2xz\geq 0. \qquad (2)$$

Во неравенството (2) знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$, т.е. ако и само ако $a = b = c$.