Републички натпревар 1990

I година

1. Докажи дека бројот $7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}}$ е делив со 5.

Решение. Да забележиме дека $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, а од овде и $7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$. Бидејќи $4 \mid 1980^{1990}$, следува дека

$$7^{1980^{1990}} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Исто така да забележиме дека $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ и $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$. Бидејќи $4 \mid 80^{90}$, добиваме

$$3^{80^{90}} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Значи, бројот $7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}}$ е делив со 10 па, според тоа, е делив и со 5.

2. Ако $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ се позитивни реални броеви, такви што $a_1 a_2 a_3 ... a_n = 1$, тогаш

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \geq 2^n .$$

Докажи!

Решение.Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1} = \sqrt{a_1}$$

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2} = \sqrt{a_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_n} = \sqrt{a_n} .$$

Ако ги помножиме овие n равенства добиваме

$$\frac{1+a_1}{2} \cdot \frac{1+a_2}{2} \cdot \frac{1+a_3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2 a_3 ... a_n} = 1,$$

т.е.

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \geq 2^n .$$

3. Остроаголен триаголник со страни што се последователни природни броеви има плоштина која е цел број. Најди барем еден таков триаголник!

Решение. Нека страните на триаголникот се $a-1$, a и $a+1$. Според Хероновата формула, добиваме

$$P = \sqrt{\frac{3}{2} a (\frac{1}{2} a + 1) \frac{1}{2} a (\frac{1}{2} a - 1)}$$

$$P = \frac{1}{4} a \sqrt{3(a-2)(a+2)} .$$

Ако a е непарен број тогаш $a\sqrt{3(a-2)(a+2)}$ не може да биде парен природен број па P не може да биде природен број. Затоа мора a да е парен број. Ставајќи $a=2k$ добиваме

$$P=k\sqrt{3(k+1)(k-1)}\,.$$

Поткореновата вредност е делива со 9. Затоа

1° $k+1=3m$, т.е. $k=3m-1$, или

2° $k-1=3m$, т.е. $k=3m+1$.

Ва првиот случај се добива

$P=3(3m-1)\sqrt{m(3m-2)}$.

За $m=9$ се добива $P=1170$ а страните на триаголникот се $51,52$ и 53, па тој е остроаголен.

Во вториот случај се добива

$$P=3(3m+1)\sqrt{m(3m+2)}\,.$$

За $m=2$ се добива $P=84$ а страните на триаголникот се $13,14$ и 15 и тој е остроаголен.

4. Воз долг $110m$ се движи со брзина од $\frac{25}{3}\ m/s$. На патеката до пругата во $09.10h$ стигнал пешак што оди во истата насока и минувал крај него $15\sec$. Во $09.16\ h$ наишол на пешак што му оди во пресрет и минувал крај него $12\sec$. Во колку часот се сретнале пешаците?

Решение. Првиот пешак во 15-те секунди нека поминал x метри. Тогаш

$$110+x=\frac{25}{3}\cdot 15$$
$$x=15\,.$$

Значи, првиот пешак поминал 15 метри за 15 секунди, па, неговата брзина е $1\ \mathrm{m/s}$.

Вториот пешак нека поминал y метри за 12 секунди. Тогаш

$$110-y=\frac{25}{3}\cdot 12$$
$$y=10\,.$$

Значи, вториот пешак поминал $10\ \mathrm{m}$ за 12 секунди, па неговата брзаина е $\frac{5}{6}\mathrm{m/s}$.

Растојанието меѓу местото на средбата на првиот пешак со вториот пешак е $360\cdot\frac{25}{3}=3000\ \mathrm{m}$. Нека пешаците се сретнале после t секунди по средбата со првиот. Тогаш

$$t\cdot 1+(t-360)\cdot\frac{5}{6}=3000$$
$$t+\frac{5}{6}t-300=3000$$
$$t=1800\,.$$

Значи, пешаците се сретнале после 30 минути, односно во $9:40$ часот.

II година

1. Замислен банкарски службеник ги сменил еврата и центите кога му раситнувал чек на еден муштерија, давајќи му центи наместо евра и евра наместо центи. Откако купил весник од 5 центи, муштеријата забележал дека му останала вредност точно двапати поголема отколку вредноста на неговиот чек. Колкава била вредноста на чекот?

Решение.Нека вредноста на чекот била k евра и y центи, каде x и y се ненегативни цели броеви и $y<100$. Банкарскиот службеник му дал x центи и y евра. Условот на задачата дека по купување на весник од 5 центи на муштеријата му останала двојно поголема сума на пари од вредноста на чекот може да се запише како

$$\begin{aligned}&100y+(x-5)=2(100x+y)\\&199x=98y-5\\&(98\cdot 2+3x)x=98y-5\\&98(y-2x)=3x+5\end{aligned}$$

Ако $y-2x=1$, тогаш $3x+5=98$, па решение на овој систем е $x=31$, $y=63$.

Ако $y-2x\geq 2$, тогаш $3x+5\geq 2\cdot 98=196$. Од овде следува $x\geq \frac{191}{3}$,

$$y\geq 2+2x\geq 2+2\tfrac{191}{3}>100,$$

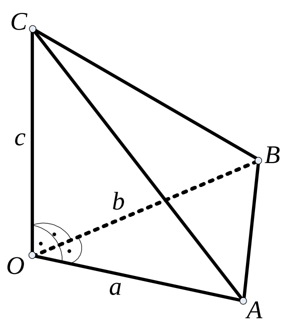
а ова не е можно бидејќи $y<100$.

Вредноста на чекот била 31 евро и 63 центи.

2. Нека $OABC$ е тетраедар, таков што $OA\perp OB\perp OC\perp OA$ и нека $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$. Да се докаже дека

$$\overline{ON}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

каде што ON е висината на тетраедарот.



Решение. Страните на траиголникот ABC се

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2},\ \overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2},\ \overline{CA}=\sqrt{c^2+a^2}.$$

Да означиме $p=\overline{AB}$, $q=\overline{BC}$, $r=\overline{CA}$. Од Хероновата формула зап лоштината на триаголникот ΔABC добиваме

$$\begin{aligned}P_{\Delta ABC}&=\sqrt{\frac{p+q+r}{2}\frac{p+q-r}{2}\frac{p-q+r}{2}\frac{-p+q+r}{2}}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(p^2+q^2-r^2+2pq)(2pq+r^2-p^2-q^2)}\end{aligned}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(2b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2})(2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}-2b^2)}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Очигледно е дека $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$, а од друга страна, пак,

$$V_{OABC}=P_{\triangle ABC}\frac{\overline{ON}}{3}=\frac{\in 1}{6}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\overline{ON},$$

од каде што со споредување лесно се добива дека

$$\overline{ON}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

3. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}\le\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2},$$

каде $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n\in\mathbb{R}$.

Решение. Да ги формираме комплексните броеви $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2,\ldots$, $z_n=a_n+ib_n$. Знаеме дека за комплексните броеви важи неравенството

$$|z_1+z_2+z_3+...+z_n|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+...+|z_n|,$$

па кога ќе замениме $z_k=a_k+ib_k$, за $k=1,2,3,...,n$, се добива горното неравенство.

4. Дадена е правоаголна шема со $(n+1)\times(n+5)$ квадрати и во полето од едниот агол еден играч. Играчот се движи по полињата како коњот во шахот. Дали играчот може да стигне во полето од спротивниот агол за $2n+3$ скокови?

Решение. Квадратната шема да ја обоиме со црна и бела боја како шаховска табла. Да воочиме дека во произволна така обоена шаховска табла две дијагонални спротивни темиња имаат иста боја ако и само ако $m+k$ е парен број. Во нашиот случај $(n+1)+(n+5)$ е парен број, па не е можно играчот со непарен број на скокови $2n+3$ да стигне од едно во друго поле со иста боја, бидејќи при секој скок коњот во шахот ја менува бојата. Значи, одговорот на задачата е „не може“.

III година

1. Да се најде полином $P(x)$ за кој важи

$$x\cdot P(x-1)=(x-1990)\cdot P(x).$$

Решение. Полиномот $P(x)(x-1990)$ е делив со x, па мора $P(x)$ да се дели со x, т.е. постои полином $P_1(x)$ така што

$$P(x)=xP_1(x).$$

Заменувајќи го тоа во даденото равенство добиваме

$$x(x-1)P_1(x-1)=(x-1990)xP_1(x)$$
$$(x-1)P_1(x-1)=(x-1990)P_1(x).$$

Аналогно како пред малку, ќе постои полином $P_2(x)$ така што

$$P_1(x)=(x-1)P_2(x)$$

и ако тоа се замени се добива

$$(x-1)(x-2)P_2(x-1)=(x-1990)(x-1)P_2(x)$$
$$(x-2)P_2(x-1)=(x-1990)P_2(x).$$

Ако ова постапка се продолжи, се добиваат полиноми $P_3(x), P_4(x), ..., P_{1990}(x)$, и за овој последниот полином ќе важи

$$(x-1990)P_{1990}(x-1)=(x-1990)P_{1990}(x)$$
$$P_{1990}(x-1)=P_{1990}(x).$$

Од овде следува дека полиномот $P_{1990}(x)-P_{1990}(0)$ прима вредност 0 за секој цел број, а тоа е можно само ако $P_{1990}(x)-P_{1990}(0)$ е нулти полином. Нека ж

$$P_{1990}(0)=C,$$

тогаш

$$P(x)=xP_1(x)=x(x-1)P_2(x)=....=x(x-1)(x-2)...(x-1989)P_{1990}(x)=$$
$$=Cx(x-1)(x-2)...(x-1989)$$

2. Да се докаже дека

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1,$$

за секој природен број n.

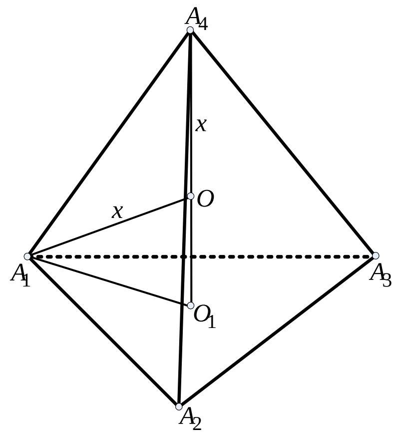
Решение. За било кој природен број n имаме

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(n-1)}=\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})=1-\frac{1}{n}<1.$$

3. Дадени се четири еднакви сфери со радиус R секоја од кои се допира со останатите три. Да се определи радиусот на сферата што ги допира дадените сфери.

Решение. Центрите A_1, A_2, A_3 и A_4 на дадените сфери се темиња на правилен тетраедар со раб $2R$. Со x да го означиме радиусот на опишаната сфера околу тетраедарот $A_1A_2A_3A_4$, а со O нејзиниот центар. Нека O_1 е проекција на темето A_4 врз основата $A_1A_2A_3$. Тогаш $\overline{A_1O_1}=R\frac{2\sqrt{3}}{3}$, и

$$h^2=\overline{A_4O_1}^2=(2R)^2-(R\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=(R\frac{2\sqrt{6}}{3})^2.$$



Од правоаголниот триаголник A_1O_1O добиваме

$$\overline{A_1O_1}^2+\overline{OO_1}^2=\overline{A_1O}^2$$

$$\frac{4R^2}{3}+(\frac{2R\sqrt{6}}{3}-x)^2=x^2$$

$$x=R\frac{\sqrt{6}}{2}$$

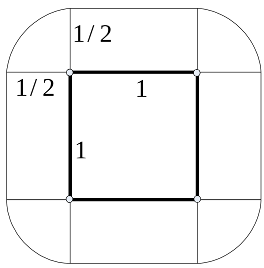
Радиусите на бараните сфери се

$$R_1=x+R=R(\frac{\sqrt{6}}{2}+1)$$

$$R_2=x-R=R(\frac{\sqrt{6}}{2}-1)$$

4. Во правоаголник 20×25 дадени се 120 квадрати од облик 1×1. Докажи дека при било каков распоред на квадратите во правоаголникот, останува слободно место за круг со дијаметар 1.

Решение. Секој квадрат ќе го замениме со поголема фигура како што е прикажано на цртежот. Плоштината на поголемата фигура е $1+4\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2\pi=3+\frac{\pi}{4}$. Плоштината на 120 такви фигури е еднаква на



$$P=120(3+\frac{\pi}{4})=360+30\pi.$$

Ако страните на правоаголникот го поместуваме за $\frac{1}{2}$ кон внатрешноста добиваме нов правоаголник чија плоштина е $P_{\text{пр}}=19\cdot 24=456$. Забележуваме дека $P_{\text{пр}}>P$, па, затоа, постои точка во новиот правоаголник која е непокриена од сто и дваесетте нови фигури. Круг со центар во таа точка и радиус $\frac{1}{2}$ е одговор на задачата.

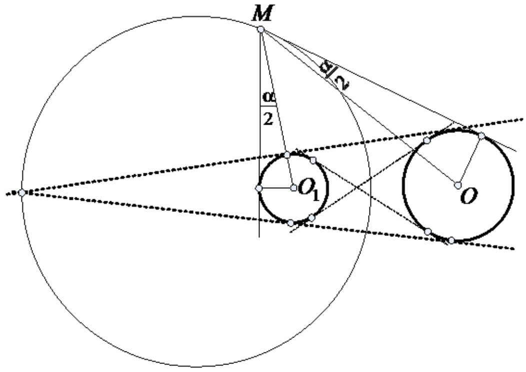
IV година

1. Иста како задача 1 од трета година.

2. Иста како задача 2 од трета година.

3. Нека се дадени две кружници кои не се сечат и ниедна од нив не ја содржи другата кружница. Да се најде геометриското место на точки од кои што двете кружници се гледаат под ист агол.

Решение. Нека радиусите на кружинците се R_1 и R_2. Координатниот cсстем го бираме така што центрите O_1 и O_2 имаат координати $(-a,0)$ и $(a,0)$ соодветно. Нека $M(x,y)$ припаѓа на бараното геометриско место на точки, а со α да го означиме аголот под кој се гледаат двете кружници од M. Тогаш



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \text{ и } \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

од каде добиваме

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{R_1^2}=\frac{(x-a)^2+y^2}{R_2^2}$$

$$(R_2^2-R_1^2)(x^2+y^2)+2ax(R_2^2+R_1^2)+a^2(R_2^2-R_1^2)=0.$$

Затоа, ако $R_1=R_2$ тогаш бараното геометриско место на точки ќе биде y-оската, т.е. симетралата на отсечката O_1O_2, а ако $R_1\neq R_2$, тогаш геометриското место на точки е кружница со центар на правата O_1O_2 (Аполониева кружница за точките O_1 и O_2).

4. Да се реши равенката

$$1+x+x^2+x^3=2^y$$

во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка да ја запишеме во обликот

$$(1+x)(1+x^2)=2^y.$$

Од овде следува дека $x+1=2^m$, $x^2+1=2^{y-m}$, т.е.

$$x=2^m-1 \text{ и } x^2=2^{y-m}-1$$

$$x^2=2^{2m}-2^{m+1}+1$$

$$2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2.$$

Можни се следниве два случаи:

(i) Нека $m=0$, тогаш единствено решение е $x=y=0$

(ii) Нека $m>0$. Тогаш се добива $2^{y-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$. Бидејќи 2^m и 2^{2m-1} се парни броеви, следува дека 2^{y-m-1} е непарен број, а тоа е можно ако и само ако $2^{y-m-1}=1$, т.е. $y=m+1$. Заменувајќи го тоа, се добива

$$2^m = 2^{2m-1},$$

од каде што следува дека $m=1$, $y=2$ и $x=1$.

Значи, единствено решение во овој случај е $x=1$ и $y=2$.