VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2011

16 января 2011 года, 9.00–13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. В трапеции $ABCD$ точки M и N – середины оснований AD и BC соответственно.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке MN.

б) Остается ли утверждение пункта а) в силе, если известно лишь, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой MN ?

2. Найдите все функции f: $R\to R$ такие, что для любых $x,y\in R$ выполнено равенство

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y).$$

(Здесь R обозначает множество действительных чисел.)

3. Обозначим через N множество всех целых положительных чисел. Упорядоченную пару $(a;b)$ чисел $a,b\in N$ назовем *интересной*, если для любого $n\in N$ существует $k\in N$, такое, что число a^k+b делится на 2^n. Найдите все интересные упорядоченные пары чисел.

VII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2011

16 January, 2011, 9.00–13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Given is trapezoid $ABCD$, M and N being the midpoints of the bases AD and BC, respectively.

a) Prove that the trapezoid is isosceles if it is known that the intersection point of perpendicular bisectors of the lateral sides belongs to the segment MN.

b) Does the statement of the point a) remain true if it is only known that the intersection point of perpendicular bisectors of the lateral sides belongs to the line MN ?

2. Find all functions f: $R\to R$ which satisfy the equality

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$$

for any $x,y\in R$. (Here R denotes the set of real numbers.)

3. Let N denote the set of all positive integers. An ordered pair $(a;b)$ of numbers $a,b\in N$ is called *interesting*, if for any $n\in N$ there exists $k\in N$ such that the number a^k+b is divisible by 2^n. Find all interesting ordered pairs of numbers.

VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2011

17 января 2011 года, 9.00–13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновременно следующим условиям:
i) каждое множество состоит из 4 элементов;
ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;
iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.

5. Пусть n – целое число, $n>1$. Элемент a из множества $M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$ назовем *хорошим*, если найдется элемент b из M, такой, что число $ab-b$ делится на n^2. Далее, элемент a назовем *очень хорошим*, если a^2-a делится на n^2. Пусть g и v – число хороших и число очень хороших элементов в M соответственно.

Докажите, что $v^2+ v \leq g \leq n^2- n$.

6. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, точки M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников ADM и BCM пересекаются в точках M и L. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

VII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2011

17 January, 2011, 9.00–13.30
Second day
(Each problem is worth 7 points)

4. Find the maximum number of sets which simultaneously satisfy the following conditions:
i) any of the sets consists of 4 elements;
ii) any two different sets have exactly 2 common elements;
iii) no two elements are common to all the sets.

5. Let n be an integer, $n>1$. An element a of the set $M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$ is called *good* if there exists some element b of M such that $ab-b$ is divisible by n^2. Furthermore, an element a is called *very good*, if a^2-a is divisible by n^2. Let g denote the number of good elements in M and v denote the number of very good elements in M.

Prove that $v^2+ v \leq g \leq n^2- n$.

6. Diagonals of the cyclic quadrilateral $ABCD$ intersect at point K; M and N are midpoints of the diagonals AC and BD respectively. The circumscribed circles of the triangles ADM and BCM intersect at points M and L. Prove that the points K, L, M and N lie on a circle (all the points are supposed to be different).

VII Международная Жаутыковская олимпиада 2011 года
РЕШЕНИЕ задач по математике

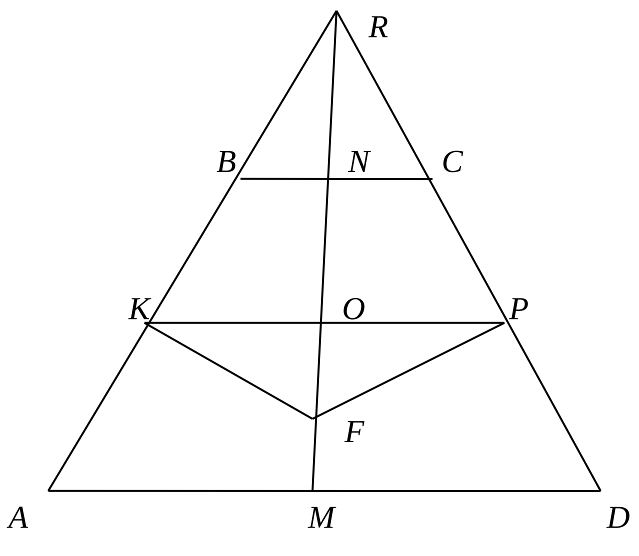
Задача №1. В трапеции $ABCD$ точки M и N – середины оснований AD и BC соответственно.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке MN.

б) Остается ли утверждение пункта а) в силе, если известно лишь, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой MN ?

Решение.
а) Пусть $AD>BC$, лучи AB и DC пересекаются в точке R. Обозначим середины боковых сторон AB и CD соответственно через K и P (см. Рис. 1 внизу).
Хорошо известно, что точки R, M, N и O лежат на одной прямой, где точка O – середина отрезка KP (так как $BC\|KP\|AD$).
Пусть F – точка пересечения серединных перпендикуляров сторон AB и CD. По условию задачи $F\in OM$, и из предположения $AD>BC$ вытекает $ON = OM \geq OF$.
Заметим, что точки K и P лежат на окружности с диаметром RF. Тогда, так как $KO = OP$ и $RO>OF$ (следовательно, O не является центром этой окружности), то имеем $RF \perp KP$, значит $RM \perp AD$. Это означает, что треугольник ΔRAD – равнобедренный, следовательно, трапеция $ABCD$ также является равнобедренной.

Рис. 1



б) В этом случае трапеция, вообще говоря, вполне может быть не равнобедренной.
Рассмотрим неравнобедренную трапецию $ABCD$ с $AB\perp CD$. Тогда $KRPF$ – прямоугольник. Следовательно, точка F лежит на прямой RO (т.е. на прямой MN, см. обозначения из предыдущего пункта). Таким образом, мы получаем нужный пример.

Задача № 2. Найдите все функции f: $R\to R$ такие, что для любых $x,y\in R$ выполнено равенство $f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$.
(Здесь R обозначает множество действительных чисел.)

Решение. Заметим, что функция $f(x)\equiv 0$ удовлетворяет тождеству (из условия задачи)

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y). \qquad (*)$$

Теперь допустим, что f тождественно не равна нулю; пусть $x_0 \in R$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда подставляя $y = x_0$ в тождество (*), мы получим

$$f(x + \alpha) = f(x - \alpha) + 4\alpha x \qquad (1)$$

где $\alpha = f(x_0)$.

Пусть теперь $x = z - f(y)$ для произвольных $z,y \in R$. Тогда (*) преобразуется в следующее тождество

$$f(z) = f(z - 2f(y)) + 4(z - f(y))f(y),$$

или

$$f(z) - z^2 = f(z - 2f(y)) - (z - 2f(y))^2. \qquad (2)$$

Мы докажем, что $f(a) - a^2 = f(b) - b^2$ для любых $a,b \in R$. Для этой цели, мы подставим $x = x_1 = (a - b)/8\alpha$ в тождестве (1) и получим

$$f(x_1 + \alpha) - f(x_1 - \alpha) = (a - b)/2,$$

которое может быть переписано в следующем виде:

$$a - 2f(x_1 + \alpha) = b - 2f(x_1 - \alpha).$$

Подставляя $z = a$, $y = x_1 + \alpha$ и $z = b$, $y = x_1 - \alpha$ в тождество (2), мы получим

$$f(a) - a^2 = f(a - 2f(x_1 + \alpha)) - (a - 2f(x_1 + \alpha))^2 = f(b - 2f(x_1 - \alpha)) - (b - 2f(x_1 - \alpha))^2 = f(b) - b^2,$$

т.е. $f(a) - a^2 = f(b) - b^2$ для любых $a,b \in R$.

Это означает, что функция $f(x) - x^2$ постоянна: $f(x) - x^2 = c$, значит , $f(x) = x^2 + c$ для некоторой вещественной константы c.

Легко проверить, что любая функция вида $f(x) = x^2 + c$ удовлетворяет тождеству (*).

Ответ: $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = x^2 + c$, где c – произвольная вещественная постоянная.

Задача № 3. Обозначим через N множество всех целых положительных чисел. Упорядочен-ную пару $(a;b)$ чисел $a,b \in N$ назовем *интересной*, если для любого $n \in N$ существует $k \in N$, такое, что число $a^k + b$ делится на 2^n. Найдите все интересные упорядоченные пары чисел.

Решение. Мы введем следующие обозначения. Пусть I обозначает множество всех (упорядоченных) пар, а $V(m)$ – наибольшее (неотрицательное) целое число такое, что $2^{V(m)}$ делит m.

Мы докажем некоторые свойства интересных пар.

***Свойство* 1.** Если $(a;b) \in I$, тогда a и b – нечетные числа, большие 1.

Доказательство. Если одно из чисел a, b четно, тогда для $n=1$ существует $k \in N$ такое, что число $a^k + b$ делится на 2, значит a и b имеют одинаковую четность, т.е. a и b – четные. Пусть $V(b) = m$, тогда для $k \geq m+1$ имеем $V(a^k + b) = m$. Это означает, что пара $(a;b)$ не является интересной. Итак, a и b – нечетные числа.

Если $a=1$, тогда для $n = V(b+1)+1$ не существует требуемого k. Если $b=1$, тогда для $n = V(a+1)+1$ не существует требуемого k (рассмотрите отдельно два случая, когда k четно и когда k нечетно).

***Свойство* 2.** Если $(a;b) \in I$, тогда $V(a-1) \leq V(b+1)$.

Доказательство. От противного, предположим $V(a-1) > V(b+1)$. Тогда $V(a^k + b) = V(a^k - 1 + b + 1) = V(b+1)$ для любого k. Следовательно, не существует требуемого k для $n = V(a-1)$, значит, пара $(a;b)$ не интересна.

***Свойство* 3.** Если $(a;b) \in I$ и $V(a-1) = V(b+1)$, тогда $V(a+1) = V(b-1)$.

Доказательство. По Свойству 1 мы имеем $V(a-1) = V(b+1) \geq 1$.

Если $V(a-1) = V(b+1) > 1$, тогда $V(a+1) = 1 = V(b-1)$.

Если $V(a-1) = V(b+1) = 1$, тогда $a \equiv 3 \mod 4$ и $b \equiv 1 \mod 4$, и $4 | a^k + b$ влечет, что k нечетно. Тогда $a^k + 1 = (a+1)(a^{k-1} - a^{k-2} + \ldots - a + 1)$, где вторая скобка очевидно дает нечетное число. Значит, $V(a^k + 1) = V(a+1)$. Если $V(b-1) < V(a+1)$ тогда $V(a^k + b) = V(a^k + 1 + b - 1) = V(b-1)$, следовательно, для $n = V(a+1)$ не нашлось бы требуемого k. Если $V(b-1) > V(a+1)$, тогда мы имели бы $V(a^k+b) = V(a^k+1+b-1) = V(a+1)$, что невозможно для $n \geq V(a+1)+1$. Значит, $V(a+1)=V(b-1)$.

***Свойство* 4.** Если a и b – нечетные числа, большие 1, $V(a-1) = V(b+1)$ и $V(a+1) = V(b-1)$, тогда $(a;b)\in I$.

Доказательство. Пусть $m=\max\{V(a-1), V(a+1)\}$; очевидно, $m > 1$. (Заметим для будущего, что тогда одно из чисел $V(a-1)$, $V(a+1)$ равно m, а другое равно 1; значит, $V(a-1)+V(a+1)=m+1$.) Теперь мы имеем $a+b = a+1+b-1 = a-1+b+1 \vdots 2^{m+1}$.

Пусть для $n = s \geq m+1$ существует k такое, что $a^k + b \vdots 2^s$. Тогда мы докажем, что существует неотрицательное целое число l такое, что $a^{k+l} + b \vdots 2^{s+1}$ (это – шаг индукции в доказательстве того, что пара $(a;b)$ интересна).

Пусть $a^k + b = 2^s a_1$, где $a_1 \in N$. Если a_1 четно, тогда мы можем полагать $l = 0$. Если a_1 нечетно, тогда поскольку

$$a^{k+l} + b = a^l (a^k + b) - b(a^l - 1) = a^l \cdot 2^s \cdot a_1 - b(a^l - 1), \qquad (1)$$

мы можем полагать $l = 2^{s-m}$, и принимая во внимание

$$V(a^{2^{s-m}} - 1) = V(a-1) + V(a+1) + V(a^{2^1} + 1) + \ldots + V(a^{2^{s-m-1}} + 1) = m + 1 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{s-m-1 \text{ раз}} = s, \qquad (2)$$

мы заключаем из (1) и (2), что $a^{k+l} + b \vdots 2^{s+1}$. Таким образом, шаг индукции завершен и свойство доказано.

***Свойство* 5.** Если $(a;b)\in I$ и $V(b+1) > V(a-1)$, тогда $V(b+1)\geq V(a^2-1)$.

Доказательство. Заметим сначала, что $V(b+1) > V(a-1)\geq 1$. Если $V(a-1)>1$, тогда $V(a+1)=1$ и $V(b+1)\geq V(a-1)+V(a+1)= V(a^2-1)$.

Теперь, пусть $V(a-1)=1$. Если k нечетно, тогда $V(a^k+b) = V(a^k-1+b+1) = V(a^k-1)= V(a-1)=1$, значит каждое k, дающее $V(a^k+b)>1$ должно быть четным. Тогда из $(a;b)\in I$ следует, что $(a^2;b)\in I$. И, наконец, по Свойству 2 получаем $V(b+1)\geq V(a^2-1)$.

***Свойство* 6.** Если a и b – нечетные числа, большие 1 и $V(b+1)\geq V(a^2-1)$, тогда $(a;b)\in I$.

Доказательство. Используя (2) для $s-m=l>0$, получаем

$$V(a^{2^l} - 1) = V(a-1) + V(a+1) + l - 1,$$

которое может быть переписано как $l = V(a^{2^l} - 1) + 1 - V(a^2 - 1)$.

Как следствие неравенства $V(b+1)\geq V(a^2-1)$, найдется l такое, что $V(b+1) = V(a^{2^l} - 1)$ (можно просто взять $l = V(b+1) + 1 - V(a^2 - 1)$). Поскольку $V(b+1) = V(a^{2^l} - 1) > 1$, имеем $V(b-1) = 1 = V(a^{2^l} + 1)$. По Свойству 4 это означает, что $\left(a^{2^l}; b\right) \in I$ и, очевидно, $(a;b)\in I$.

Эти свойства непосредственно дают ответ задачи.

Ответ: $(2^\alpha x - 1, 2^\alpha y + 1)$, $(2^\alpha x - 1, 2^\beta y - 1)$, $(2^\alpha x + 1, 2^\alpha y - 1)$ и $(2^\alpha x + 1, 2^\beta y - 1)$, где $x, y \in N$ – нечетные и $1 < \alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in N$.

VII Международная Жаутыковская олимпиада 2011 года
РЕШЕНИЕ задач по математике

Задача №4. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновре-менно следующим условиям:

i) каждое множество состоит из 4 элементов;

ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;

iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.

Решение. Мы сначала покажем, что существуют 7 множеств, удовлетворяющих условиям i)-iii) задачи.

Например, легко проверить, следующий набор множеств подходит:
A_1={1;2;3;8}, A_2={1;4;5;8}, A_3={1;6;7;8}, A_4={2;4;6;8}, A_5={2;5;7;8}, A_6={3;4;7;8}, A_7={3;5;6;8}.

Вот еще два примера подходящих наборов множеств:
A_1={1;2;3;4}, A_2={1;2;5;6}, A_3={3;4;5;6}, A_4={1;3;6;7}, A_5={2;4;6;7}, A_6={1;4;5;7}, A_7={2;3;5;7};
или:
A_1={1;2;3;4}, A_2={1;2;5;6}, A_3={1;2;7;8}, A_4={1;3;6;7}, A_5={1;3;5;8}, A_6={2;3;6;8}, A_7={2;3;5;7}.

Теперь докажем, что не существует более 7 множеств, удовлетворяющих данным условиям.

Сначала мы докажем одну лемму.

Лемма. Никакие два элемента не принадлежат более, чем 3 множествам.

Доказательство. От противного, пусть некоторые 4 множества A_1, A_2, A_3, A_4 содержат одни и те же два элемента a,b. По условию iii) существует некоторое множество B, не содержащее пару $\{a,b\}$. Если B один из этих элементов, скажем, a, тогда по условию ii) B должен содержать элемент (не совпадающий с b) $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3$, $a_4 \in A_4$, причем все эти элементы различны. Значит, $\{a, a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset B$, и $|B| \geq 5$ – противоречие условию i). Если же B не содержит ни a и ни b, тогда B содержит 5 непересекающихся пар элементов, одну пару, общую с A_1, одну – с A_2, одну – с A_3 одну – с A_4, следовательно, $|B| \geq 10$, противоречие. Таким образом, лемма доказана.

Теперь предположим, что существуют, по крайней мере, 8 множеств, удовлетворяющих данным условиям. Выберем одно из них, пусть A, и еще некоторых 7 из них: $B_1, B_2, \ldots, B_7$. Пусть $A = \{a,b,c,d\}$.

Рассмотрим, три двойки различных пар элементов в А:

I) $\{a;b\},\{c,d\};$

II) $\{a;c\}, \{b;d\};$

III) $\{a;d\}, \{b;c\}.$

Каждое из 7 множеств $B_1, B_2, \ldots, B_7$ имеет общую пару элементов с A. Следовательно, найдутся, по крайней мере, 3 из них, которые имеют общую пару с A с одной и той же двойки пар I), II), III).

Пусть, для определенности, общие пары каждого из B_1, B_2, B_3 с A принадлежат двойке I). По Лемме не все эти 3 множества B_1, B_2, B_3 имеют одну и ту же общую пару с A (иначе эта пара принадлежала бы более, чем 3 множествам). Поэтому мы можем предполагать, что $\{a,b\} \subset B_1$ и $\{c,d\} \subset B_2$, $\{c,d\} \subset B_3$. Из условия задачи следует $c,d \notin B_1$, $a,b \notin B_2$, $a,b \notin B_3$. Пусть x, y – два элемента, отличные от a, b, c, d такие, что $B_1 = \{a;b;x;y\}$. Так как B_1 имеет общую пару с B_2, мы заключаем, что $x, y \in B_2$. Аналогично, B_1 имеет общую пару с B_3, поэтому $x, y \in B_3$. Следовательно, мы получаем $B_2 = B_3 = \{c;d;x;y\}$, противоречие. Таким образом, задача решена.

Ответ: 7 множеств.

Задача № 5. Пусть n – целое число, $n>1$. Элемент a из множества $M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$ назовем *хорошим*, если найдется элемент b из M, такой, что число $ab-b$ делится на n^2. Далее, элемент a назовем *очень хорошим*, если a^2-a делится на n^2. Пусть g и v – число хороших и число очень хороших элементов в M соответственно.

Докажите, что $v^2+ v \leq g \leq n^2- n$.

Решение. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение n на простые множители (т.е. p_i – простые, α_i – натуральные, $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$). Пусть $a \in M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$.

Лемма 1. Элемент a является хорошей $\Leftrightarrow$ НОД$(a-1, n^2) > 1$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если a – хорошая, тогда $ab-b = b(a-1)$ делится на n^2 для некоторого $1 \leq b < n^2$. Как следствие, получаем НОД$(a-1, n^2) > 1$.
($\Leftarrow$) Пусть $a \in M$ и $\gcd(a-1, n^2) = d > 1$. Тогда для $b = n^2/d \in M$ число $b(a-1) = ab-b$ делится на n^2.

Следствие. Количество хороших элементов равно $n^2 - \varphi(n^2)$, где φ – функция Эйлера.

Теперь легко доказать одно из неравенств:

$$g = n^2 - \varphi(n^2) = n^2 - n\varphi(n) \leq n^2 - n\,.$$

Лемма 2. Элемент a является очень хорошей $\Leftrightarrow$ существует бинарная последовательность $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ такая, что $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$ для каждого $1 \leq i \leq k$ (здесь *бинарность* последовательности означает, что каждое $\varepsilon_i \in \{0,1\}$).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если a – очень хорошая, то по определению $n^2 \mid a(a-1)$. Значит, найдутся n_1, n_2 такие, что $n^2 = n_1 n_2$, $n_1 \mid a$ и $n_2 \mid a-1$. Заметим, что n_1, n_2 взаимно просты, так как НОД$(n_1, n_2) =$ НОД$(a, a-1) = 1$. Поэтому найдется $\varnothing \neq A \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ такое, что

$$n_1 = \prod_{i \in \{1,2,\ldots k\} \setminus A} p_i^{2\alpha_i} \text{ и } n_2 = \prod_{i \in A} p_i^{2\alpha_i}\,.$$

Следовательно, по китайской теореме об остатках, мы видим, что a является (единственным в M) решением системы сравнений $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$, $1 \leq i \leq k$, для бинарной последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$, определенной следующим образом:

$$\varepsilon_i = 1 \Leftrightarrow i \in A\,.$$

($\Leftarrow$) Если a является решением системы сравнений $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$, $1 \leq i \leq k$, для бинарной последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$, тогда, поскольку $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, число a^2 также будет решением этой системы. По китайской теореме об остатках, мы получим $a^2 \equiv a \bmod n^2$, другими словами $a^2 - a$ делится на n^2, т.е. a – очень хорошая.

Следствие. Количество очень хороших элементов равно $2^k - 1$.

Далее, пусть a – произвольный очень хороший элемент, определенный системой $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$, $1 \leq i \leq k$, с бинарной последовательностью $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$. Теперь, мы для каждого $B \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ построим хороший элемент a_B следующим образом: a_B является (единственным в M) решением системы

$$\begin{cases} a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}, \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \setminus B \\ a \equiv p_i + \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}, \text{ for } i \in B \end{cases}.$$

Заметим, что $a_\varnothing = a$.

Наконец, снова по китайской теореме об остатках, для очень хороших элементов a, b и $X, Y \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ имеет место:

$$\left[a_X = b_Y\right] \text{ влечет } [a = b \text{ и } X = Y].$$

Таким образом, $g \geq 2^k(2^k - 1) = v^2 + v$, и задача решена.

Задача №6. Диагонали вписанного четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *K*, точки *M* и *N* – середины диагоналей *AC* и *BD* соответственно. Описанные окружности треугольников *ADM* и *BCM* пересекаются в точках *M* и *L*. Докажите, что точки *K*, *L*, *M* и *N* лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

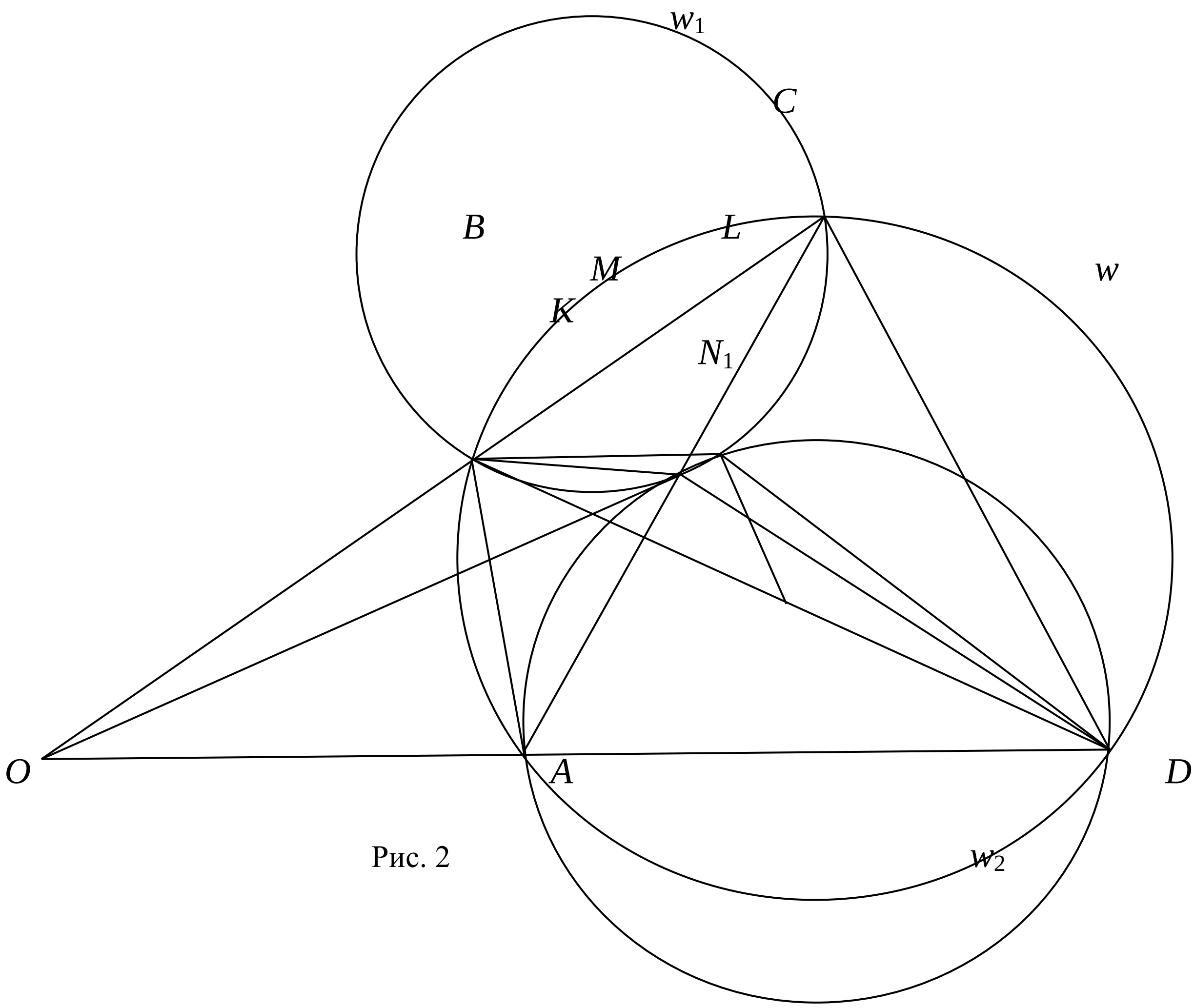


Рис. 2

Решение. Из условия задачи вытекает, что прямые *BC* и *AD* не параллельны. Пусть *O* – точка их пересечения (см. Рис. 2.). Обозначим окружности, описанные около треугольников *BMC*, *AMD*, *ABC*, соответственно через w_1, w_2 и w. Заметим, что прямые *BC*, *ML* и *AD* являются радикальными осями пар окружностей w_1 и w, w_1 и w_2, w_2 и w, соответственно. Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке, а именно в точке *O*.

Пусть окружность, описанная около треугольника *KML*, пересекает прямую *BD* в точках *K* и N_1. Заметим, что $\angle BLM = \angle BCM$, $\angle MLN_1 = \angle MKB$, Следовательно, $\angle BLN_1 = \angle BLM + \angle MLN_1$ $= \angle BCM + \angle MKB = \angle OBD = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - \angle CAD = \angle OAC$ и $\angle N_1LD = \angle MLD - \angle MLN_1 =$ $= \angle OAC - \angle AKD = \angle ODB$.

Вычислим соотношение $\frac{BN_1}{N_1D}$. Имеем

$$\frac{BN_1}{N_1D}=\frac{S_{BLN_1}}{S_{LDN_1}}=\frac{BL\cdot\sin\angle BLN_1}{LD\cdot\sin\angle DLN_1}=\frac{BL\cdot\sin\angle OAC}{LD\cdot\sin\angle ODB}=\frac{BL\cdot\sin\angle OAC}{LD\cdot\sin\angle OCA}=\frac{BL}{LD}\cdot\frac{OC}{OA}. \qquad (1)$$

Заметим, что $\Delta OCM \sim \Delta OLB$ и $\Delta OMA \sim \Delta ODL$, Следовательно, $\frac{OC}{OL}=\frac{CM}{BL}$ и $\frac{OA}{OL}=\frac{MA}{LD}$. (2)

Из (1) и (2) следует, что $\frac{BN_1}{N_1D}=\frac{CM\cdot OL}{OL\cdot MA}=1$, Следовательно, точки N_1 и N совпадают. Это значит, что окружность, описанная около треугольника ΔMKL, проходит через точку N.

Замечание. Если точки M и N лежат соответственн на диагоналях AC и BD, и $\frac{BN}{ND}=\frac{CM}{MA}$, тогда точки K, L, M, N лежат на одной окружности, где точка L определена как в условии задачи.