

Регионален натпревар 2003

I година

1. За реалните броеви a, b, c и d важи равенството $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ и неравенствата $ab + cd > 0$, $ac + bd > 0$. Докажи дека $ad + bc > 0$.

Решение. Заради равенството

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 > 0$$

и неравенствата $ab + cd > 0$, $ac + bd > 0$ добиваме:

$$\begin{aligned}(ad + bc)(ac + bd) &= a^2 dc + c^2 ab + d^2 ab + b^2 dc = (a^2 + b^2)dc + (c^2 + d^2)ab \\ &= (a^2 + b^2)dc + (a^2 + b^2)ab = (a^2 + b^2)(dc + ab) > 0\end{aligned}$$

т.е. $(ad + bc)(ac + bd) > 0$. Бидејќи $ac + bd > 0$, па според тоа $ad + bc > 0$, што и требаше да се докаже.

2. Петар имал 40 крави од кои првата давала 1l млеко, втората 2l млеко, третата 3l млеко, и т.н. четириесеттата крава давала 40l млеко. Петар сакал на неговите 4 синови да им ги подели кравите така што секој да добие десет крави и синовите од добиените крави да добиваат по ист број литри млеко. Дали Петар може да ги подели кравите? Доколку може најди една таква поделба.

Решение. Сите крави заедно ќе даваат

$$2 + 3 + \dots + 39 + 40 = (1 + 40) + (2 + 39) + (3 + 38) + \dots + (20 + 21) = 20 \cdot 41 = 820.$$

Значи секој син треба да добие десет крави кои ќе даваат по 205 литри млеко. Ќе ги искористиме равенствата $1 + 40 = 2 + 39 = 3 + 38 = \dots = 20 + 21$. Заради претходните равенства можеме кравите да ги поделиме по парови. Кравите кои даваат заедно четириесет и еден литар млеко ќе ги сметаме за пар, и ќе ги нарекуваме крави придружнички. Петар може да постапи на следниот начин: ако на некој син му ја додели кравата која дава n литри млеко, ќе му ја додели и кравата придружничка. Значи на секој од синовите нема да му дели по една крава, туку ќе им дели парови крави кои се придружнички. Сега е лесно, На секој од синовите ќе му даде по пет крави кои даваат не повеќе од дваесет литри млеко, а потоа на секој од синовите на доделените крави ќе му ги додели и кравите придружнички.

Еден таков начин е:

1 син: 1, 2, 3, 4, 5, 40, 39, 38, 37, 36

2 син: 6, 7, 8, 9, 10, 35, 34, 33, 32, 31

3 син: 11, 12, 13, 14, 15, 30, 29, 28, 27, 26

4 син: 16, 17, 18, 19, 20, 25, 24, 23, 22, 21

Секако дека постојат и многу други поделби.

3А. Точката M од внатрешноста на триаголникот ABC е таква што триаголниците ABM , BCM и ACM имаат еднакви плоштини. Докажи дека M е тежиштите на триаголникот.

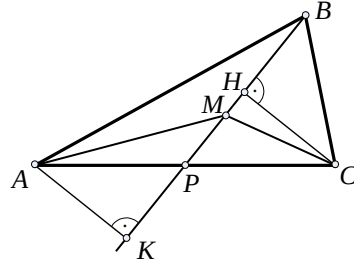
Решение. Ќе покажеме дека ако триаголниците ABM и BCM имаат еднакви плоштини, тогаш точката M припаѓа на тежишната линија повлечена од темето B . Нека K и H се ортогоналните проекции од точките A и C на правата BM , и нека правата BM ја сече отсечката AC во точката P (види цртеж). Тогаш

$$\frac{\overline{BM} \cdot \overline{AK}}{2} = P_{\triangle ABM} = P_{\triangle BCM} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CH}}{2},$$

па според тоа $\overline{AK} = \overline{CH}$.

Ако $AC \perp BM$, тогаш $K = H = P$, па $\overline{AP} = \overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.

Ако AC не е нормално на BP , тогаш јасно е дека триаголниците AKP и CHP се складни. Навистина, тие имаат еднакви агли и една иста страна. Според тоа $\overline{AP} = \overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.



4А. За кои цифри a и b ($a \neq 0$) бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ е полн квадрат.

Решение. За било кои цифри a и b ($a \neq 0$) бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} 9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4 &= 9(10 \cdot \overline{ab} + 5 - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4 = 9(9 \cdot \overline{ab} + 5)(\overline{ab} + 1) + 4 \\ &= 81 \cdot \overline{ab}^2 + 126 \cdot \overline{ab} + 49 = (9 \cdot \overline{ab} + 7)^2 \end{aligned}$$

Значи, за било кои цифри a и b ($a \neq 0$), бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ е полн квадрат.

3Б. Аглите на еден четириаголник редоследно се $x, x+20, x+30, x+50$. Определи ги неговите агли, а потоа докажи дека тој е трапез.

Решение. Бидејќи збирот на аглите во било кој четириаголник е 360° , добиваме дека $x + x + 20 + x + 30 + x + 50 = 360^\circ$, т.е. $x = 65^\circ$. Според тоа аглите на четириаголникот се $65^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 115^\circ$. Бидејќи $85^\circ + 95^\circ = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$, паровите агли $85^\circ, 95^\circ$ и $115^\circ, 65^\circ$ се агли на трансферзала. Бидејќи тие се агли во четириаголник, тој е трапез.

4Б. Најди ги сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$, такви што $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ и $\overline{de}$ се полни квадрати.

Решение. Единствени двоцифрени броеви што се полни квадрати се 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Тие почнуваат со цифрите 1, 2, 3, 4, 6, 8, а завршуваат со цифрите 1, 4, 5, 6. Значи цифрите b, c, d може да бидат само цифрите 1, 4, 6. Броевите $\overline{bc}$ и $\overline{cd}$ се полни квадрати, а тоа е можно само ако $\overline{bc} = 16$ и $\overline{cd} = 64$. Според тоа $\overline{ab} = \overline{a1}$ од каде добиваме $a = 8$, и $\overline{de} = \overline{4e}$ од каде пак добиваме $e = 9$. Конечно, бараниот број е 81649, и тој е единствен со бараното својство.

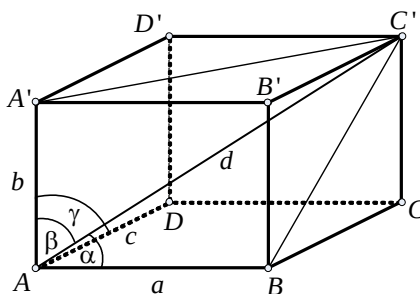
II година

1. Во даден квадар α, β, γ се аглие кои просторната дијагонала ги зафаќа со неговите рабови. Докажи дека

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Решение. Нека $ABCD A' B' C' D'$ е дадениот квадар и AC' е една негова просторна дијагонала која со страните AB, AA', AD зафаќа агли α, β, γ соодветно. Тогаш од триаголниците $ABC', AC' A', ADC'$ кои се правоаголници имаме $\cos \alpha = \frac{a}{d}, \cos \beta = \frac{b}{d}$ и $\cos \gamma = \frac{c}{d}$, од каде, заради условот $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ го добиваме бараното равенство

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$



2. Дадена е неравенката $x^2 + ax - 1 < 0$. Определи ги вредностите на параметарот a , така што множеството од нејзините решенија е интервал со должина 5.

Решение. Дискриминантата на неравенката е $D = a^2 + 4 \geq 0$, па според тоа таа има реални решенија. Од условот множеството решенија на неравенката да е интервал со должина 5 добиваме:

$$5 = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 + 4}.$$

Решенија на равенката $\sqrt{a^2 + 4} = 5$ се $a = \pm \sqrt{21}$. Лесно се проверува дека добиените вредности ги задоволуваат условите од задачата.

3А. Нека $ax^2 + bx + c$ е трином кој нема реални корени и $a + b + c > 0$. Докажи дека $c > 0$.

Решение. Бидејќи триномот $ax^2 + bx + c$ нема реални корени, за било кое $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$. Од условот $a + b + c > 0$, добиваме дека

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c > 0.$$

Значи, $ax^2 + bx + c > 0$, за секој реален број x . Според тоа $c = f(0) > 0$.

4А. Дадени се комплексните броеви a , b , c при што $1 + c + c^2 = 0$. Докажи дека

$$(ac^2 + bc)(bc^2 + ac) = a^2 - ab + b^2.$$

Решение. Од $1 + c + c^2 = 0$, имаме $c + c^2 + c^3 = 0$, т.е.

$$c^3 = -(c + c^2) = -(-1) = 1.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}(ac^2 + bc)(bc^2 + ac) &= c^2(ac + b)(bc + a) \\ &= c^2(abc^2 + a^2c + b^2c + ab) \\ &= c^2(ab(c^2 + 1) + c(a^2 + b^2)) \\ &= c^2(ab(-c) + c(a^2 + b^2)) \\ &= c^3(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2\end{aligned}$$

3Б. Одреди ги вредностите на параметарот m така што за решенијата x_1 и x_2 на равенката $x^2 + (m+3)x + m + 21 = 0$ е исполнето: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 1$.

Решение. Ако неравенката ја трансформираме и ги искористиме Виетовите правила, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2 x_1} - 1 < 0 &\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_2 x_1}{x_2 x_1} < 0 &\Leftrightarrow \frac{(x_2 + x_1)^2 - 3x_2 x_1}{x_2 x_1} < 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{(m+3)^2 - 3(m+21)}{m+21} < 0 &\Leftrightarrow \frac{m^2 + 3m - 54}{m+21} < 0 &\Leftrightarrow \frac{(m+9)(m-6)}{m+21} < 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} (m+9)(m-6) > 0 \\ m+21 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (m+9)(m-6) < 0 \\ m+21 > 0 \end{cases} &\Rightarrow m \in (-\infty, -21) \cup (-9, -6)\end{aligned}$$

4Б. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=1}^n i^k = i + i^2 + \dots + i^n,$$

каде i е имагинарната единица.

Решение. Имаме $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Ќе разгледаме четири случаи, и тоа

а) $n = 4p$. Во овој случај, $i^{4s+1} + i^{4s+2} + i^{4s+3} + i^{4s+4} = i - 1 - i + 1 = 0$, за $s = 0, 1, \dots, p-1$, па според тоа

$$\sum_{k=1}^{4p} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + i^{4p-1} + i^{4p} = 0.$$

б) $n = 4p + 1$. Во овој случај, слично како и во претходниот имаме

$$\sum_{k=1}^{4p+1} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + i^{4p-1} + i^{4p} + i^{4p+1} = 0 + i^{4p+1} = 0 + i = i$$

в) $n = 4p + 2$. Во овој случај, со разгледувањата како и во првиот случај имаме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4p+2} i^k &= i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + i^{4p-1} + i^{4p} + i^{4p+1} + i^{4p+2} \\ &= 0 + i^{4p+1} + i^{4p+2} = 0 + i - 1 = i - 1 \end{aligned}$$

г) $n = 4p + 3$. Во овој случај, со разгледувања исти како во првите три случаи,

добиваме:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4p+3} i^k &= i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + i^{4p-1} + i^{4p} + i^{4p+1} + i^{4p+2} + i^{4p+3} \\ &= 0 + i^{4p+1} + i^{4p+2} + i^{4p+3} = 0 + i - 1 - i = -1 \end{aligned}$$

III година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a,$$

каде a е позитивен реален број различен од 1.

Решение. Да забележиме дека $x \neq 1$ и $x > 0$ (за да постои $\log_x \sqrt[4]{ax}$). Со преоѓање на логаритми со основа a равенката ќе се трансформира во

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} \left(1 + \frac{1}{\log_a x}\right)} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{1}{\log_a x}\right)} = a,$$

и со понатамошни трансформации го добива обликот:

$$\sqrt{\frac{(\log_a x + 1)^2}{4 \log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{4 \log_a x}} = a.$$

Оттука $\log_a x > 0$ (заради ненегативноста на подкореновите изрази). Последната равенка е еквивалентна (заради $x \neq 1$, односно $\log_a x \neq 0$) со

$$|\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = 2a \sqrt{\log_a x} \quad (1)$$

За да ја решиме равенката (1) ќе разгледаме два случаи:

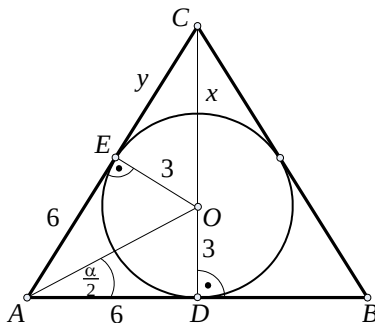
i) Нека $\log_a x > 1$, тогаш равенката преминува во равенката $\log_a x = a \sqrt{\log_a x}$.

Одовде добиваме решение, $x_1 = a^{a^2}$. Натаму, заради $\log_a x > 1$ добиваме дека $a > 1$.

ii) Нека сега $0 < \log_a x \leq 1$. Тогаш равенката (1) преминува во следната равенка: $2 = 2a\sqrt{\log_a x}$. Тогаш нејзино единствено решение е $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$. Овде да забележиме дека условот $0 < \log_a x \leq 1$ ќе биде исполнет само ако $a \geq 1$. Но за $a = 1$ добиваме $x_2 = 1$, па тоа не е решение на дадената равенка, затоа за решението на равенката x_2 важи истото како и за x_1 , т.е. е решение за почетната равенка само ако $a > 1$. На овој начин ги исцрпиме сите можности (бидејќи $\log_a x \leq 0$). Останува дека почетната равенка при $a > 1$ има две решенија $x_1 = a^{a^2}$, $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$, додека за $0 < a < 1$ равенката нема решение.

2. Околу прав кружен цилиндар со радиус на основата 3 $a + b \neq c$ и плоштина $78\pi \text{ cm}^2$ е опишана права триаголна призма (основите на цилиндарот се впишани кругови во основите на призмата, а обвивката на цилиндарот ги допира трите бочни страни на призмата). Основите на призмата се рамнокраки триаголници со основа 12 cm . Пресметај го волуменот на призмата.

Решение. Основата на цилиндарот е круг со центар во точката O , а основата на призмата е рамнокрак триаголник ABC со основа $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$. Нека D е подножјето на висината спушена од темето C , а E е допирната точка на кружницата со страната AC . Имаме $\overline{AD} = 6$, $\overline{AE} = \overline{AD} = 6$ (тангентни отсечки на кружницата повлечени од A) и $\overline{OE} = \overline{OD} = r = 3$. Да означиме $x = \overline{OC}$ и



$y = \overline{EC}$. Тогаш $\triangle OEC \sim \triangle ADC$ (правоаголници со еднаков агол кај темето C), па $(6 + y) : x = 6 : 3$. Оттука $x = \frac{6 + y}{2}$. Натаму, $\triangle OEC$ е правоаголен со хипотенуза x , па $x^2 = y^2 + 3^2$. Решавајќи го системот

$$\begin{cases} x = \frac{6 + y}{2} \\ x^2 = y^2 + 3^2 \end{cases}$$

добиваме $x = 5$, $y = 4$. Според тоа $\overline{CD} = 8$, па плоштината на основата на призмата е $B = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = 48 \text{ cm}^2$.

Нека висината на цилиндарот е H . Тогаш плоштината на цилиндарот е $P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 18\pi + 6\pi H$ т.е. $H = \frac{P - 18\pi}{6\pi} = 10 \text{ cm}$.

Според тоа $V = B \cdot H = 480 \text{ cm}^3$.

3А. Нека за аглие α, β и γ во триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1.$$

Пресметај го аголот α .

Решение. Применувајќи ги синусната и косинусната теорема даденото равенство го трансформираме на следниов начин

$$1 = \frac{\frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}}{\frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{bc} = \frac{2bc \cos \alpha}{bc} = 2 \cos \alpha.$$

Според тоа $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Бидејќи α е агол во триаголник добиваме $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

4А. Докажи дека за позитивните броеви a, b и c такви што

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad c - b \neq 1 \text{ и } c + b \neq 1$$

важи

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Решение. Заради $c^2 = a^2 + b^2 > b^2$ и позитивноста на броевите a, b и c добиваме $c > b$. Значи $c - b > 0$, $c - b \neq 1$ и $c + b \neq 1$, па постојат $\log_{c-b} a$ и $\log_{c+b} a$.

Со логаритмирање со основа a на равенството $a^2 = c^2 - b^2$ добиваме

$$\log_a a^2 = \log_a (c^2 - b^2),$$

односно

$$2 = \log_a (c - b) + \log_a (c + b) \tag{1}$$

Тогаш

$$\begin{aligned} \log_{b+c} a + \log_{c-b} a &= \frac{1}{\log_a (b+c)} + \frac{1}{\log_a (c-b)} = \frac{\log_a (c+b) + \log_a (c-b)}{\log_a (b+c) \cdot \log_a (c-b)} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{2}{\log_a (b+c) \cdot \log_a (c-b)} = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a \end{aligned}$$

3Б. Ако $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma = 1.$$

Решение. Од равенствата

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}$$

добиваме $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}$. Оттука добиваме

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = 1.$$

4Б. Пресметај:

$$-\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots \sqrt[3]{3}}}}_{2003 \text{ пати}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} -\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots \sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ пати}} &= -\log_3 (\log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots \sqrt[3]{3^{\frac{1}{3}}}}}}_{n-1 \text{ пати}}) = -\log_3 (\log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots \sqrt[3]{3^{\frac{1}{3^2}}}}}}_{n-2 \text{ пати}}) = \dots \\ &= -\log_3 (\log_3 \sqrt[3]{3^{\frac{1}{3^{n-1}}}}) = -\log_3 (\log_3 (3^{\frac{1}{3^{n-1}}})^{\frac{1}{3}}) = -\log_3 (\log_3 3^{\frac{1}{3^n}}) \\ &= -\log_3 \frac{1}{3^n} = -\log_3 3^{-n} = -(-n) \log_3 3 = n \end{aligned}$$

IV година

1. Најди го членот што не содржи x во развојот на $(\frac{1}{x} + 3x)^n$, ако коефициентот пред степенот на x во десеттиот по ред собирок е најголем.

Решение. За $k+1$ -от член во развојот добиваме

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} (3x)^k = \binom{n}{k} 3^k x^{2k-n},$$

па коефициентот пред x е $A_{k+1} = \binom{n}{k} 3^k$. Според условот на задачата имаме $A_{10} > A_9$ и $A_{10} > A_{11}$. Од $A_{10} > A_9$ имаме $\binom{n}{9} 3^9 > \binom{n}{8} 3^8$, па $\frac{n!}{(n-9)!9!} 3^9 > \frac{n!}{(n-8)!8!} 3^8$, односно $\frac{3}{9} > \frac{1}{n-8}$. Оттука $3n-24 > 9$, т.е. $n > 11$. Од $A_{10} > A_{11}$ добиваме $\binom{n}{9} 3^9 > \binom{n}{10} 3^{10}$ и постапувајќи на сличен начин како претходно $n < 12\frac{1}{3}$.

Според тоа $n = 12$.

Сега $x^{2k-12} = x^0$, па $2k-12 = 0$, односно $k = 6$. Значи бараниот член е седмиот и тој изнесува $T_6 = \binom{12}{6} 3^6 = 673596$.

2. Најди ги сите природни броеви n така што некои три последователни биномни коефициенти во развојот $(a+b)^n$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Прво да забележиме дека $n \geq 2$ за да има барем три члена во развојот. Нека за $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$ важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$, односно

$$2 \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}.$$

Оттука со средовање на изразите се добива еквивалентното равенство $(n-2k)^2 = n+2$. Според тоа n е од облик $m^2 - 2$ за некој $m \in \mathbb{N}$. Заради $n \geq 2$

добиваме $m \geq 2$. Ако $m=2$ следува $n=2$ и $k=1$. Но тогаш $2\binom{2}{1} \neq \binom{2}{0} + \binom{2}{2}$, па овој случај го отфрламе. Значи ако некои три члена од развојот формираат аритметичка прогресија тогаш n е од обликот $m^2 - 2$, каде $m=3, 4, \dots$.

Сега да докажеме дека ако $n = m^2 - 2$, за $m > 2$, тогаш постои $k, k < n$ така што важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$. Бројот k ќе го избереме од системот

$$\begin{cases} n = m^2 - 2 \\ (n - 2k)^2 = n + 2 \end{cases}.$$

Равенството $n = m^2 - 2$ го заменуваме во $(n - 2k)^2 = n + 2$ и оттука добиваме $(m^2 - 2 - 2k)^2 = m^2$, односно $m^2 - 2 - 2k = m$ или $m^2 - 2 - 2k = -m$. Имаме две можности $k_1 = \frac{m(m-1)}{2} - 1$ и $k_2 = \frac{m(m+1)}{2} - 1$.

Доволно е да го докажеме тврдењето само за едната, на пример за k_1 . Имаме $k_1 = \frac{m^2 - m - 2}{2} < \frac{m^2 - 2}{2} < m^2 - 2 < n$. Значи за k_1 важи $k_1 < n$ и $(n - 2k)^2 = n + 2$.

Последново равенство е еквивалентно со равенството

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}.$$

Конечно, сите барани броеви се од обликот $m^2 - 2$, $m=3, 4, \dots$.

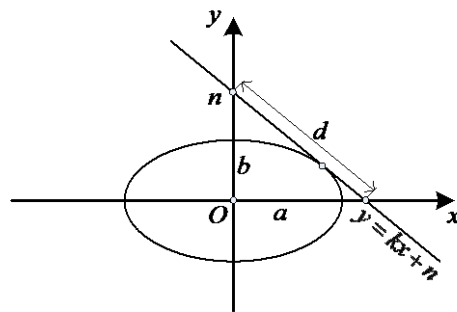
3A. Одреди ја онаа тангента на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ која со координатните оски формира триаголник со најмала хипотенуза.

Решение. Нека правата $y = kx + n$ е тангента на дадената елипса. Според тоа системот

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}$$

има единствено решение. Заменувајќи го y од втората во првата равенка добиваме квадратна равенка по x и користејќи дека нејзината дискриминанта е еднаква на 0 го добиваме условот за допир на правата и

елипсата $a^2k^2 + b^2 = n^2$. Ако $k=0$ или $n=0$ тангентата е паралелна со една од координатните оски, па не формира триаголник. Значи можеме да претпоставиме дека $k \neq 0$ и $n \neq 0$. Натому, ако ја запишеме равенката на тангентата во сегментен



облик добиваме $\frac{x}{\frac{n}{k}} + \frac{y}{n} = 1$, па нејзиниот отсечок меѓу координатните оски има

должина $d = \sqrt{\frac{n^2}{k^2} + n^2}$. Според тоа

$$d^2 = \frac{n^2}{k^2} + n^2 = \frac{a^2 k^2 + b^2}{k^2} + a^2 k^2 + b^2 = a^2 k^2 + \frac{b^2}{k^2} + a^2 + b^2 = \left(ak - \frac{b}{k}\right)^2 + (a+b)^2.$$

Должината на отсечокот ќе биде најмала ако $ak - \frac{b}{k} = 0$. Оттука $k = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $n = \pm\sqrt{ab+b^2}$ ($a, b > 0$). Значи постојат четири прави со бараната особина и тие се

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}} x + \sqrt{ab+b^2}, \quad y = \sqrt{\frac{b}{a}} x - \sqrt{ab+b^2}, \\ y = -\sqrt{\frac{b}{a}} x + \sqrt{ab+b^2}, \quad y = -\sqrt{\frac{b}{a}} x - \sqrt{ab+b^2}.$$

4А. Определи ги сите реални функции f кои се дефинирани за секој реален број x , такви што $f(x) + xf(1-x) = x^2 - 1$.

Решение. Нека f е функција која ја задоволува равенката. Ако воведеме сме- на $1-x=t$, добиваме $f(1-t) + (1-t)f(t) = t^2 - 2t$.

Последната равенка ќе ја помножиме со t и го формираме системот

$$\begin{cases} tf(1-t) + (t-t^2)f(t) = t^3 - 2t^2 \\ f(t) + tf(1-t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$f(t)(t^2 - t + 1) = -t^3 + 3t^2 - 1,$$

од каде добиваме $f(t) = \frac{-t^3 + 3t^2 - 1}{t^2 - t + 1}$.

Не е тешко да се провери и обратното, т.е. дека функцијата $f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 - x + 1}$ ја задоволува дадената равенка.

3Б. Докажи дека $\frac{n}{2^1(n-1)} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \frac{n}{2^3(n-3)} + \dots + \frac{n}{2^{n-1} \cdot 1} < 4$ за секој природен број n таков што $n \geq 2$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција. За $n=2$ имаме $\frac{2}{2^{2-1}} = 2 < 4$, па тврдењето е точно. Ако $n=3$, тогаш $\frac{3}{2^1 \cdot 2} + \frac{3}{2^2 \cdot 1} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} < 4$, па неравенството важи и за $n=3$. Сега да претпоставиме дека неравенството е точно за природниот број n , $n \geq 3$. За $n+1$ имаме:

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{2^1(n-1)} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \frac{n}{2^3(n-3)} + \dots + \frac{n}{2^{n-1} \cdot 1} &= \\
 &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n}{2^1 n} + \frac{n}{2^2(n-1)} + \frac{n}{2^3(n-2)} + \dots + \frac{n}{2^{n-1} \cdot 2} + \frac{n}{2^n \cdot 1} \right) \\
 &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n}{2^1 n} + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2^1(n-1)} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \dots + \frac{n}{2^{n-2} \cdot 2} + \frac{n}{2^{n-1} \cdot 1} \right) \right) \\
 &\leq \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{5}{2} \\
 &\stackrel{n \geq 3}{\leq} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{6} < 4
 \end{aligned}$$

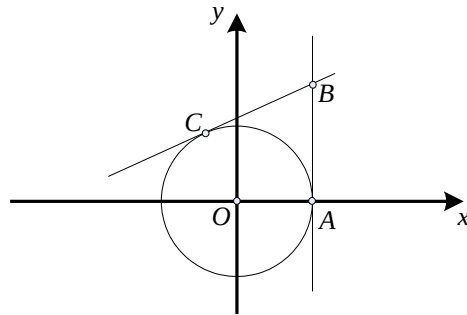
Според тоа тврдењето важи за секој $n \geq 2$.

4Б. Во точката $A(4,0)$ повлечена е тангентата на кружницата $x^2 + y^2 = 16$.
Одреди точка B на таа тангента таква што плоштината на трапезот образуван од координатните оски и тангентите на кружницата повлечени од точката B има плоштина 26.

Решение. Нека t е тангентата на кружницата повлечена во точката A и $B(4, b) \in t$. Со $C(0, c)$ да ја означиме пресечната точка на правата BC и y -оската. Тогаш за плоштината на трапезот $OABC$ добиваме

$$\frac{b+c}{2} \cdot 4 = 26, \text{ т.е. } b+c=13.$$

Натаму, равенката на правата BC гласи $y = \frac{b-c}{4}x + c$. Условот правата



$y = kx + n$ да биде тангентата на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$ е $r^2(1+k^2) = n^2$, па добиваме $16(1 + (\frac{b-c}{4})^2) = c^2$ и оттука $c = \frac{16+b^2}{2b}$. Заменувајќи $b+c=13$ во последното равенство добиваме $3b^2 - 26b + 16 = 0$. Решенијата на оваа равенка се $b_1 = \frac{2}{3}$ и $b_2 = 8$. Точката B може да биде од двете страни на x -оската (кружницата е симетрична во однос на x -оската) па затоа добиваме 4 точки кои го исполнуваат условот на задачата. Тие се $B_1(4, 8)$, $B_2(4, -8)$, $B_3(4, \frac{2}{3})$ и $B_4(4, -\frac{2}{3})$.