XXVII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Двајца велосипедисти тргнале од местата A и B еден кон друг. Кога се сретнале, првиот велосипедист поминал $\frac{4}{7}$ од патот и уште $\frac{24}{10}km$, а вториот велосипедист поминал два пати помалку од првиот. Најдете го растојанието од A до B.

Решение. Ако со x го означиме растојанието од A до B тогаш, од условите во задачата, следува равенството:

$$\frac{4}{7}x+\frac{24}{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}x+\frac{24}{10}\right)=x.$$

Оттука следува дека

$$\left(1-\frac{4}{7}-\frac{2}{7}\right)x=\frac{24}{10}+\frac{12}{10}$$

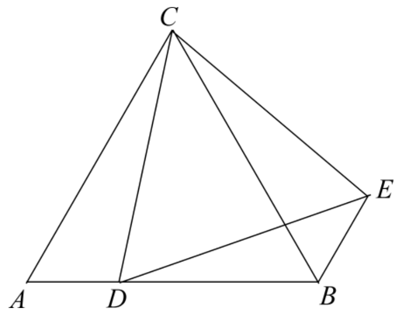
од каде се добива дека е $x=25{,}2km.$

2. Во квадрат 4×4 да се распоредат прости броеви така што производот на броевите во секој ред, колона и дијагонала е $P=2002+13(-1)^{2001}$.

Решение. Бидејќи $P=2002-13=1989=3\cdot 3\cdot 13\cdot 17$ следува:

17	13	3	3
3	3	13	17
13	17	3	3
3	3	17	13

3. Даден е рамностран триаголник ABC. Точката D лежи на отсечката AB. Конструиран е рамностран триаголник CDE, така што точките B и E се во една и иста полурамнина во однос на правата CD. Докажете дека $AC\parallel BE$.



Решение. Бидејќи триаголниците ABC и CDE се рамнострани, следува дека

$$\overline{AC}=\overline{BC}, \overline{DC}=\overline{EC} \text{ и}$$

$$\measuredangle ACB=\measuredangle DCE=60^\circ.$$

Тогаш

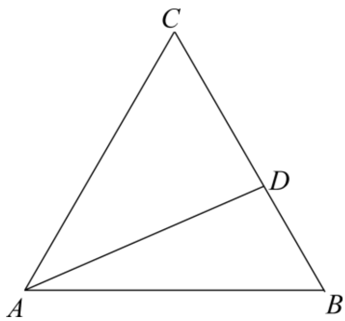
$$\measuredangle ACD = \measuredangle ACB - \measuredangle DCB$$
$$= \measuredangle DCE - \measuredangle DCB = \measuredangle BCE.$$

Оттука следува дека $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ (САС) па $\measuredangle CBE = \measuredangle CAD = 60°$, од каде

$$\measuredangle ABE = \measuredangle ABC + \measuredangle CBE = 60° + 60° = 120°.$$

Добивме дека збирот на аглите $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle ABE$, добиени при пресек на правите AC и BE со AB, е $60° + 120° = 180°$. Значи, $AC \parallel BE$.

4. Правата AD кон кракот BC на рамнокракиот триаголник ABC го дели периметарот на истиот триаголник на делови од $17cm$ и $11cm$. Најдете ги страните на триаголникот ако нивните мерни броеви се последователни природни броеви.



Решение. Од условот на задачата следува дека

а) $\overline{AC} + \overline{CD} = 17; \overline{AB} + \overline{BD} = 11$ или

б) $\overline{AC} + \overline{CD} = 11; \overline{AB} + \overline{BD} = 17$.

а) Со собирање на овие две равенства се добива дека $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{AB} + \overline{BD} = 28$ т.е.

$$2\overline{AC} + \overline{AB} = 28.$$

Бидејќи мерните броеви на страните на триаголникот се последователни природни броеви, од последното равенство следува дека

$$2\overline{AC} + \overline{AC} + 1 = 28 \text{ или } 2(\overline{AB} + 1) + \overline{AB} = 28$$

при што решение се добива само во првиот случај и тоа $\overline{AC} = 9; \overline{AB} = 10$.

б) Со собирање на овие две равенства се добива $2\overline{AC} + \overline{AB} = 28$ од што, како и во случајот под а) наоѓаме $\overline{AC} = 9; \overline{AB} = 10$.

VII одделение

1. Една работа ја започнале 33 работници и според планот требало да ја завршат за 80 дена. Но, по 16 дена работење, 9 работници се ангажирани на друга работа. За колку дена ќе задоцни завршувањето на работата?

Решение. Нека, почнувајќи од 16-тиот ден, 33-9 работници ја завршат работата за x дена. Тогаш важи: $80 \cdot 33 = 16 \cdot 33 + x(33 - 9)$ од каде

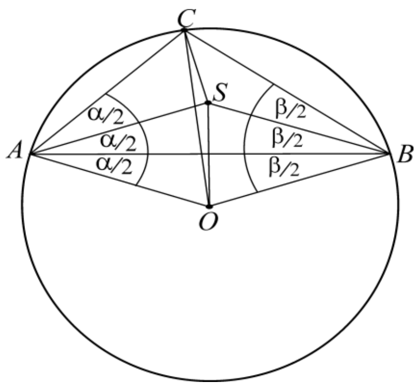
$x=88$. Значи, целата работа ќе се заврши за $88+16$ дена, па задоцнувањето ќе биде $8+16=24$ дена.

2. Најдете ги сите трицифрени броеви кои се еднакви на третиот степен од збирот на нивните цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Тогаш $\overline{abc}=(a+b+c)^3$. Бидејќи $\overline{abc}$ е трицифрен број, равенката ќе важи ако $5\leq a+b+c\leq 9$. Ако $a+b+c=5$ тогаш $(a+b+c)^3$ завршува на 5. Но, тогаш и $\overline{abc}$ завршува на 5, од каде следува дека $a+b+c>5$, што е контрадикција. Слично, ако $a+b+c=6$ или $a+b+c=9$ тогаш $(a+b+c)^3$ завршува на 6 или на 9, и повторно се добива контрадикција. Останува да се проверат случаите $a+b+c=7$ и $a+b+c=8$. Ако $a+b+c=7$, тогаш $\overline{abc}=7^3=343$, но $3+4+3\neq 7$. Останува случајот $a+b+c=8$. Тогаш $\overline{abc}=8^3=512$ и $5+1+2=8$. Бараниот број е 512.

3. Во триаголник ABC центарот на впишаната кружница S и центарот на опишаната кружница O се симетрични во однос на страната AB. Пресметајте ги аглите во триаголникот.

Решение. Точката O лежи на симетралата на страната AB, па мора и точката S да лежи на неа. Бидејќи $\overline{AS}=\overline{BS}$ следува дека и $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}$, па и $\alpha=\beta$ т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак и $\overline{AC}=\overline{BC}$. Од $\triangle AOC$ и $\triangle BOC$ заклучуваме дека $\frac{\gamma}{2}=3\frac{\alpha}{2}=3\frac{\beta}{2}$ т.е. $\gamma=3\alpha=3\beta$. Тогаш

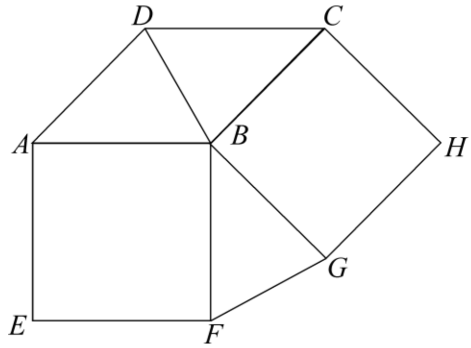


$$\alpha+\beta+\gamma=5\alpha=180^\circ$$

па $\alpha=\beta=36^\circ$ и $\gamma=108^\circ$.

4. Над страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ конструирани се квадрати $AEFB$ и $BGHC$. Докажете дека должината на отсечката GF е еднаква на должината на една дијагонала на паралелограмот $ABCD$.

Решение. Не е важно дали еден или двата квадрата делумно го покриваат паралелограмот. Нека се квадратите како на цртежот лево. Тогаш, $\triangle ABD$ и $\triangle BFG$ се складни:



$$\overline{AB}=\overline{BF};$$
$$\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BG};$$
$$\triangle FBG=\triangle BAD$$

(како агли со нормални краци) па е $\overline{BD}=\overline{FG}$.

VIII одделение

1. Колона извидници има должина $1km$ и се движи рамномерно. Куририот кој е на чело на колоната трча до крајот на колоната, ја предава пораката и повторно се враќа на чело на колоната. За тоа време колоната изминува пат од $1km$. Колкав пат поминал куририот?

Решение. Нека куририот се движи со брзина x, колоната со брзина y и нека со s го означиме патот што куририот го минува од чело на колоната до нејзиниот крај. Тогаш е:

$$\frac{s}{x}=\frac{1-s}{y}; \quad \frac{s+1}{x}=\frac{s}{y}.$$

Од овие две равенства следува дека

$$\frac{x}{y}=\frac{s}{1-s}=\frac{s+1}{s}; \ (s\neq 0, s\neq 1)$$

од каде се добива:

$$2s^2=1; s=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Изминатиот пат е

$$2s+1=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=(\sqrt{2}+1)km.$$

2. Нека $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2002}$ се последователни цели броеви, за кои важи

$$-x_0+x_1-x_2+\ldots-x_{2000}+x_{2001}-x_{2002}=2003. \qquad (1)$$

Пресметајте го бројот x_{2002}.

Решение. Равенството (1) го запишуваме во следниот облик:

$$(-x_0+x_1)+(-x_2+x_3)+\ldots+(-x_{2000}+x_{2001})-x_{2002}=2003.$$

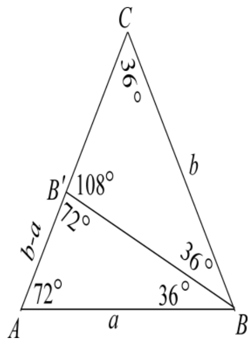
Бидејќи x_i, $i=0,1,...2002$ се последователни цели броеви следува дека $x_{i+1}-x_i=1$ од каде се добива дека

$$1001-x_{2002}=2003$$

т.е.

$$x_{2002}=-1002.$$

3. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b аголот при основата е 72°. Докажете дека $b=\sqrt{a(a+b)}$.



Решение. Нека е BB' симетрала на $\measuredangle ABC$. Тогаш

$$\measuredangle CAB=\measuredangle B'AB,$$
$$\measuredangle ABC=\measuredangle AB'B,$$
$$\measuredangle ACB=\measuredangle ABB'.$$

т.е. триаголниците ABC и $AB'B$ се слични.

Од сличноста следува дека

$$a:b=(b-a):a$$

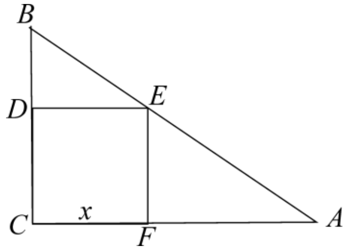
па е

$$a^2=b(b-a)=b^2-ab.$$

Оттука

$$b^2=a^2+ab \text{ т.е. } b=\sqrt{a(a+b)}.$$

4. Во правоаголен триаголник ABC $(\angle C=90^\circ)$ со катети $\overline{CA}=21cm$ и $\overline{CB}=28cm$ впишан е квадрат чии две страни лежат на катетите, а четвртото теме е на хипотенузата. Пресметајте ја должината на отсечките на кои темето на квадратот ја дели хипотенузата.



Решение. Нека $CDEF$, $D\in CB$, $E\in BA$, $F\in CA$ е квадрат со страна x впишан во $\triangle ABC$. Тогаш

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle CDEF}+P_{\triangle DEB}+P_{\triangle FAE}$$

каде $\triangle DEB$ е правоаголен триаголник со катети x и $28-x$, а $\triangle FAE$ е правоаголен триаголник со катети x и $21-x$. Затоа,

$$\frac{21\cdot 28}{2}=x^2+\frac{x(28-x)}{2}+\frac{x(21-x)}{2}$$

од каде $x = 12cm$. Тогаш, со примена на Питагоровата теорема за $\triangle DEB$ и $\triangle FAE$, соодветно се добива

$$\overline{EA} = \sqrt{(21-x)^2 + x^2} = \sqrt{225} = 15cm,$$

$$\overline{BE} = \sqrt{(28-x)^2 + x^2} = \sqrt{400} = 20cm.$$