Самоил Малчески, Скопје, Македонија
Вера Зенга-Малческа, Хаген, Германија

ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ – ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Неодминлива област на секоја математичка олимпијада е Теоријата на броеви. Притоа, за учениците од основното образование, односно до возраст од 15,5 години теориските знаења кои се потребни за решавањето на задачите од оваа област завршуваат заклучно со малата теорема на Ферма. Имајќи го ова предвид, како и фактот дека овие знаења се достапни во повеќето книги од Теоријата на броеви, во следните разгледувања истите нема да ги презентираме. Меѓутоа, читателите кои имаат потреба од нив истите може да ги најдат во литературата која е наведена на крајот од нашите разгледувања.

1. Дадени се природните броеви a, b, n такви што бројот a^2+2nb^2 е точен квадрат. Докажи дека бројот a^2+nb^2 може да се запише како збир на квадрати на два природни броја.

Решение. Нека $a^2+2nb^2=c^2, (c\in\mathbb{N})$. Тогаш $2nb^2=c^2-a^2$, па заклучуваме дека $c>a$ и a и c се со иста парност. Сега имаме

$$a^2+nb^2=a^2+\frac{c^2-a^2}{2},$$
$$a^2+nb^2=\frac{c^2+a^2}{2},$$
$$a^2+nb^2=\frac{c^2+2ac+a^2}{4}+\frac{c^2-2ac+a^2}{4},$$
$$a^2+nb^2=(\frac{c+a}{2})^2+(\frac{c-a}{2})^2.$$

Конечно, бидејќи a и c се со иста парност, заклучуваме дека $\frac{c+a}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ се природни броеви, па бараното претставување е дадено со последното равенство.

2. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$ такви што $\overline{ab}$ е делител на $\overline{a0b}$.

Решение. Условот $\overline{ab}\,|\,\overline{a0b}$ е еквивалентен на условот

$$10a+b\,|\,(10(10a+b)-(100a+b)),$$

односно на условот $10a+b\,|\,9b$. Ако $b=0$, тогаш a може да биде било која ненулта цифра. Непосредно се проверува дека за $b\in\{1,2,3,4,6,7,9\}$ не постои цифра a која ги задоволува условите на задачата. За $b=5$ добиваме дека $10a+5$ треба да се содржи во 45, па затоа $a=1$ или $a=4$. За $b=8$ добиваме дека $10a+8$ треба да се содржи во 72, па затоа $a=1$. Конечно, бараните двоцифрени броеви се:

10, 15, 18, 20, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80 и 90.

3. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) за кои важи

$$5a^b-b=2004.$$

Решение. Лесно се проверува дека не постои решение за кое $a=1$. Нека $a\geq 2$. Ако $b\geq 9$, тогаш важи $5a^b-b\geq 5\cdot 2^9-9=2551$. Со провер-ка за вредностите $b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ се добива решението $a=401$, $b=1$.

4. Определи ги сите трицифрени природни броеви $A<500$ кои го имаат следново својство: Ако еден по друг се запишат броевите $A, 2A$ и A, се добива деветцифрен број кој е точен квадрат и кој има точно 4 различни прости делители.

Решение. Нека $A=\overline{abc}$. Добиениот деветцифрен број може да се запише во видот

$$\begin{aligned}1000000\cdot\overline{abc}+2000\cdot\overline{abc}+\overline{abc}&=(1000+1)^2\cdot\overline{abc}=1001^2\cdot\overline{abc}\\&=7^2\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot\overline{abc}.\end{aligned}$$

Според тоа, $\sqrt{A}$ мора да е прост број или степен на прост број различен од 7, 11 и 13 и притоа да важи $10<\sqrt{A}<23$. Сега лесно се добива дека $\sqrt{A}$ може да биде само $2^4=16, 17$ или 19. Значи, бараните броеви се 256, 289 и 361.

5. Нека x и y се природни броеви такви што $3x^2+x=4y^2+y$. Докажи дека $x-y$ е точен квадрат.

Решение. Равенството од условот на задачата е еквивалентно со равенството

$$(x-y)(3(x-y)+6y+1)=y^2.$$

Нека $d = \mathrm{NZD}(x-y, 3(x-y)+6y+1)$. Нека претпоставиме дека $p \mid d$, каде p е некој прост број. Тогаш $p \mid x-y$, па затоа $p \mid y^2$, од каде следува дека $p \mid y$. Според тоа, $p \mid (3(x-y)+6y)$, па затоа $p \mid 1$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $d=1$. Но, производ на два заемно прости броја $x-y$ и $3(x-y)+6y+1$ е точен квадрат ако и само ако двата броја се точни квадрати, што значи дека $x-y$ е точен квадрат.

6. На таблата се напишани 2010 природни броеви и еден од нив е бројот 2011. Познато е дека за секои два напишани броеви на таблата е напишана и апсолутната вредност на нивната разлика. Докажи дека сите броеви напишани на таблата се деливи со 2011.
Решение. Сите напишани броеви се меѓусебно различни, бидејќи ако има два еднакви, тогаш нивната разлика ќе биде 0, а како таа не е природен број таа не може да е напишана на таблата. Нека
$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2010}.$$
Тогаш
$$a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < ... < a_{2009} - a_1 < a_{2010} - a_1.$$
Сите овие 2009 броеви се напишани на таблата и се помали од бројот a_{2010}, па затоа
$$a_{2009} = a_{2010} - a_1, a_{2008} = a_{2009} - a_1, ..., a_1 = a_2 - a_1.$$
Оттука добиваме
$$a_2 = 2a_1, a_3 = 3a_1, ..., a_{2010} = 2010a_1,$$
односно $a_k = ka_1$. Но, 2011 е прост број, кој е запишан на таблата, па затоа единствена можност е $a_1 = 2011$, од каде следува тврдењето на задачата.

7. Во записот на 2009-цифрен природен број се појавуваат само цифрите 5 и 8. Докажи дека со испуштање на само една цифра може да се добие 2008-цифрен број делив со 11.
Решение. Број е делив со 11 ако и само ако разликата на збировите на цифрите на парните и на непарните места во неговиот запис е делива со 11. Ќе докажеме поопшто тврдење:
Ако во записот на $(2n+1)-$ *цифрен број се појавуваат само ненултите цифри* a *и* b*, тогаш со испуштање само на една цифра може да се*

добие број кај кој збирот на цифрите на парните места е еднаков на збирот на цифрите на непарните места.

Ако почетниот број е од видот $\overline{abab...aba...baba}$ или $\overline{baba...bab...abab}$, тогаш со бришење на средната цифра се добива симетричен број, за кој важи дека збирот на цифрите на парните позиции е еднаков на збирот на цифрите на непарните позиции. Во друг случај почетниот $(2n+1)-$ цифрен број содржи барем еден пар соседни еднакви цифри. Сега ги бришеме сите парови соседни цифри кои се еднакви aa или bb, се додека не добиеме број запишан со непарен број цифри кај кој секои две последователни цифри се различни. Овој случај веќе го решивме, па можеме да определиме цифра со чие отфрлање добиваме број кој има еднаков збир на цифрите на парните и непарните позиции. Кога ќе вратиме пар последователни еднакви цифри aa, т.е. bb збировите на цифрите на парните и непарните позиции се зголемуваат за a, т.е. b, што значи дека остануваат еднакви. Конечно, кога ќе ги вратиме сите парови еднакви цифри добиваме $2n-$цифрен број кај кој збировите на цифрите на парните и непарните позиции се еднакви, со што задачата е решена.

8. Определи го најмалиот збир на цифрите на број од видот $3n^2+n+1$, за $n\in\mathbb{N}$.

Решение. За $n=1$ бројот е 5. За $n=8$ го добиваме бројот 201, кој има збир на цифри 3. Ќе докажеме дека ова е бараниот најмал збир. Имаме

$$3n^2+n+1=2n^2+n(n+1)+1\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),$$

што значи дека сите броеви од даденит вид се непарни. Затоа не е можно овие броеви да имаат збир на цифрите 1, како и да се од видот $2\cdot 10^m$. Според тоа, треба да испитаме дали равенката

$$3n^2+n+1=10^m+1$$

има решение во множеството природни броеви. Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$n(3n+1)=2^m5^m.$$

Бидејќи броевите n и $3n+1$ се заемно прости и $n<3n+1$, можни се следниве два случаја:

$$n=1, 3n+1=10^m \text{ или } n=2^m, 3n+1=5^m.$$

Првиот случај не е можен, додека во вториот случај добиваме

$$3\cdot 2^m+1=3n+1=5^m.$$

За $m=1$ и $m=2$ немаме равенство ($3\cdot 2+1\neq 5$ и $3\cdot 2^2+1\neq 5^2$), а за $m\geq 3$ ја имаме следнава оценка

$$5^m=5^2\cdot 5^{m-2}>24\cdot 5^{m-2}>3\cdot 2^3\cdot 2^{m-2}=3\cdot 2^{m+1}>3\cdot 2^m+1,$$

па дадената равенка нема рфешенија во множеството природни броеви. Конечно, од претходните разгледувања следува дека најмалиот збир на цифрите на броевите од видот $3n^2+n+1$, за $n\in\mathbb{N}$ е 3.

9. Ако a,b,c се природни броеви такви што $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ е природен број, докажи дека abc е точен куб.

Решение. Ако сите три броја a,b,c се еднакви на 1, тогаш тврдењето е тривијално. Понатаму, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a,b,c)=1$. Имено, ако $\mathrm{NZD}(a,b,c)=d>1$, тогаш доволно е тврдењето да го докажеме за броевите $\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$.

Нека p е произволен прост делител на бројот abc. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека p не е делител на a, $p|b$ и дека p^k е најголемиот степен на бројот p кој е делител b. Тогаш степенот на бројот p во именителот на скратената дропка $\frac{a}{b}$ е еднаков на p^k. Но, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ е природен број, па затоа степенот на бројот p барем во уште една од скратените дропки $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ мора да е точно p^k. Тоа мора да е дропката $\frac{b}{c}$ (дропката $\frac{c}{a}$ отпаѓа бидејќи p не е делител на a). Според тоа, најголемиот степен на бројот p кој е делител на бројот c е степенот кој го дели bp^k, т.е. тоа е p^{2k}. Сега добиваме дека точниот степен на бројот p во abc е еднаков на p^{3k}. Но, ова важи за секој прост делител p на abc, па затоа abc е точен куб.

10. Определи ги сите подредени четворки (x,y,z,t) природни броеви x,y,z,t такви што

$$x+y=zt,$$
$$z+t=xy.$$

Решение. Ако ги собереме дадените равенства последователно добиваме

$$\begin{aligned}&xy+zt=x+y+z+t,\\&xy-x-y+1+zt-z-t+1=2,\\&(x-1)(y-1)+(z-1)(t-1)=2.\end{aligned}$$

Бидејќи $x\geq 1, y\geq 1, z\geq 1, t\geq 1$, важи

$$x-1\geq 0, y-1\geq 0, z-1\geq 0, t-1\geq 0,$$

па затоа можни се следниве случаи:

1) $(x-1)(y-1)=0, (z-1)(t-1)=2$,

2) $(x-1)(y-1)=1, (z-1)(t-1)=1$,

3) $(x-1)(y-1)=2, (z-1)(t-1)=1$.

Ако е $(x-1)(y-1)=0$, тогаш $x=1$ или $y=1$, а од $(z-1)(t-1)=2$ следува $z=2, t=3$ или $z=3, t=2$. Но, $6=zt=x+y$, па затоа ги добиваме решенијата $(1,5,2,3), (1,5,3,2), (5,1,2,3), (5,1,3,2)$.

Ако е $(x-1)(y-1)=1, (z-1)(t-1)=1$, тогаш $x-1=y-1=z-1=t-1=1$, па единствено решение е $x=y=z=t=2$, т.е. $(2,2,2,2)$.

Во третиот случај со аналогни разгледувања како во првиот случај ги добиваме решенијата $(2,3,5,1), (2,3,1,5), (3,2,5,1), (3,2,1,5)$.

11. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2=2^y+2021^z. \qquad (*)$$

Решение. Јасно x е непарен број. Ако $y\geq 3$, тогаш

$$1\equiv x^2\equiv 5^z \pmod 8,$$

па затоа z е парен број. Нека $z=2a$, за некој $a\in\mathbb{N}$. Тогаш почетната равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-2021^a)(x+2021^a)=2^y. \qquad (1)$$

Нека $d=\text{NZD}(x-2021^a, x+2021^a)$. Тогаш $d\,|\,2\cdot 2021^a$ и $d\,|\,2^y$, од каде следува $d\,|\,2$ и како $d\geq 2$ следува дека $d=2$. Оттука и од (1) следува дека мора да е $x-2021^a=2$ и $x+2021^a=2^{y-1}$. Ако ги одземеме последните две равенки добиваме

$$2021^a=2^{y-2}-1.$$

Ако $y\geq 4$, тогаш

$$1\equiv 2021^a=2^{y-2}-1\equiv -1 \pmod 4),$$

што е противречност. Но, $y \geq 4$, бидејќи $2^{10}-1<2021$, па во овој случај немаме решение.

Ако $y=1$, тогаш 2021^a+2 не може да биде точен квадрат, бидејќи дава остаток 3 при делење со 5, а точните квадрати при делење со 5 даваат остаток 0, 1 или 4. Значи, и во овој случај равенката (*) нема решение.

Останува случајот $y=2$. Тогаш (*) е еквивалентна со

$$(x-2)(x+2)=2021^z.$$

Бидејќи $x-2$ и $x+2$ се непарни броеви кои тие се разликуваат за 4, тие се заемно прости, па можни се следниве два случаја:

1) $x-2=1, x+2=2021^z$, па затоа $x=3$, што не е можно заради втората равенка.
2) $x-2=43^z, x+2=47^z$, од каде следува $47^z-43^z=4$, т.е. $z=1$, бидејќи за $z>1$, добиваме
$$47^z-43^z=(47-43)\cdot(47^{z-1}+47^{z-2}\cdot 43+...+43^z)>4.$$

Конечно, единствено решение на задачата е $x=45, y=2, z=1$.

12. Определи ги сите природни броеви n кои имаат точно 16 природни делители $d_1,d_2,...,d_{16}$ такви што $1=d_1<d_2<...<d_{16}=n$, $d_6=18$ и $d_9-d_8=17$.

Решение. Бидејќи 18 е делител на n, а броевите 1, 2, 3, 6, 9 и 18 се делители на 18, заклучуваме дека тие се првите шест делители на n. Ако $p,q,r,...$ се преостанатите прости делители на n, тогаш

$$n=2^a3^bp^cq^dr^e...,$$

каде $a,b,c,d,...$ се ненегативни цели броеви, па затоа бројот n има $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)...$ делители. Бидејќи n има 16 делители, секој од броевите $1+a, 1+b, 1+c,...$ е степен на бројот 2, па затоа n има најмногу четири прости делители. Исто така, 4 не е делител на n, бидејќи $d_4=6$, па затоа $a=1$. Понатаму, $b+1$ е степен на бројот 2 и не е помал од 3, па затоа или $b=3, c=1, d=e=...=0$ или $b=7$ и $c=d=...=0$. Значи, $n=2\cdot 3^3p$ или $n=2\cdot 3^7$. Ако $n=2\cdot 3^7$, тогаш $d_8=54$ и $d_9=162$, па затоа $d_9-d_8=108\neq 17$. Според тоа, мора да е $n=2\cdot 3^3p$. Тогаш

$27 < p < 54$ или $p > 54$. Во првиот случај $17 = d_9 - d_8 = 54 - p$, па е $p = 37$. Во вториот случај $17 = d_9 - d_8 = p - 54$, па е $p = 71$. Значи, $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ или $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71$.

13.Нека a и b се природни броеви такви што $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ е прост број. Определи ја најголемата можна вредност на p.

Решение. Јасно, b е парен број, т.е. $b = 2c$, па затоа

$$p = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}, \text{ т.е. } \frac{4p^2}{c^2} = \frac{a-c}{a+c}.$$

Нека $\frac{2p}{c} = \frac{m}{n}$, $\text{NZD}(m,n) = 1$. Сега, ако $k = \text{NZD}(a-c, a+c)$, тогаш

$$a - c = km^2, a + c = kn^2,$$

па затоа $2c = k(n^2 - m^2)$ и ако замениме во $2p = \frac{cm}{n}$, добиваме

$$4p = \frac{k(n^2 - m^2)m}{n}. \tag{1}$$

Ќе разгледаме два случаја.

а) Ако m и n се непарни, тогаш $8 | m^2 - n^2$, па од $\text{NZD}(n, n^2 - m^2) = 1$ следува $n | k$, т.е. $8 | 4p$, што значи $p = 2$.

б) Ако m и n се со различна парност, тогаш од (1) следува дека k е парен, т.е. $k = 2r$. Сега, равенството (1) се сведува на $2p = \frac{r(n^2 - m^2)m}{n}$. Бидејќи $n | r$, можеме да земеме $r = ns$, па затоа $2p = s(n-m)(n+m)m$. Со испитување на можните случаи се добива дека $m = 2, n = 3$ и $p = 5$ е најголемата можна вредност за p.

14.Определи ги сите природни броеви n кои ги задоволуваат условите

1) Бројот n не е делив со ниту еден квадрат на природен број поголем од 1.
2) Бројот n има само еден прост делител од видот $4k + 3, k \in \mathbb{N}_0$.
3) Ако со $S(n)$ го означиме збирот на цифрите на бројот n, а со $d(n)$ бројот на природните делители на бројот n, тогаш $S(n) + 2 = d(n)$.
4) Бројот n зголемен за 3 е точен квадрат на природен број.
5) Бројот n нема прости делители кои имаат 4 или повеќе цифри.

Решение. Од условот 1) следува дека $n = p_1 p_2 ... p_s$, т.е. n е производ на $s \in \mathbb{N}$ различни прости броеви (n не е 1, што следува од условот 2) или 3)). Значи, $d(n) = 2^s$, па затоа

$$n \equiv S(n) = 2^s - 2 \equiv 0,2 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Од друга страна, според условот 4) важи $n+3 = m^2$ за некој $m \in \mathbb{N}$, па затоа

$$n \equiv n+3 = m^2 \equiv 0,1 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Оттука заклучуваме дека $3 | n$, па $3 | m$, што значи $n \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 9)$. Така ја добиваме конгруенцијата

$$2^s = S(n) + 2 \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 9),$$

од која следува $s \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 6)$.

Ако n е непарен број, од условот 2) следува дека $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, па затоа $m^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, што не е можно. Значи, $2 | n$. Сега да го оцениме бројот s. Според условот 5) важи неравенството $n < 6 \cdot 10^{3(s-2)}$, па затоа

$$S(n) \le 5 + 9 \cdot 3(s-2) = 27s - 49,$$

од каде добиваме

$$2^s \le 27s - 47.$$

Со индукција се проверува дека за $s \ge 8$ важи спротивното неравенство $2^s > 27s - 47$, па затоа $s \le 7$. Но, $s \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 6)$, па затоа $s = 3$, што значи $n = 6p$ за некој прост број $p < 1000$. Понатаму, следува

$$d(n) = 8, S(n) = 6.$$

Бидејќи $n > 6$ е парен број, заклучуваме дека последната цифра на n мора да е 0, 2 или 4, а како $n+3 = m^2$, мора да е $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 10)$. Тогаш $5 | m$ и како m мора да е непарен имаме

$$m^2 \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 100), n \equiv 22 (\mathrm{mod}\, 100).$$

Бидејќи $n < 6000$ и $S(n) = 6$, можно е $n \in \{222, 1122, 2022\}$. Со непосредна проверка добиваме дека $n = 1122$ не е можно, па затоа единствени решенија се $n = 222$ и $n = 2022$.

15. Определи ги сите прости броеви p за кои $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5$ е делив со 13.

Решение. За $p=2$ добиваме дека $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5=348$ и овој број не е делив со 13. За $p=3$ добиваме

$$2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5=512+27^3+512^2-5\equiv 5+1^3+5^2-5$$
$$\equiv 1-1=0(\mathrm{mod}13),$$

па затоа едно решение е $p=3$. Ако $p>3$, тогаш $p=6k\pm1$, па затоа

$$p^2=35k^2\pm12k+1=12t+1 \text{ за некои } k,t\in\mathbb{N}.$$

Од Малата теорема на Ферма следува

$$2^{12}\equiv3^{12}\equiv4^{12}\equiv1(\mathrm{mod}13),$$

па затоа

$$2^{12t}\equiv3^{12t}\equiv4^{12t}\equiv1(\mathrm{mod}13),$$

за некој $t\in\mathbb{N}$. Сега имаме

$$\begin{aligned}2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5&=2^{12t+1}+3^{12t+1}+4^{12t+1}-5\\&=2\cdot2^{12t}+3\cdot3^{12t}+4\cdot4^{12t}-5\\&\equiv2+3+4-5=4(\mathrm{mod}13),\end{aligned}$$

што значи дека не постои прост број $p>3$ кој е решение на задачата. Конечно, единствено решение е $p=3$,

Задачи за самостојна работа

16. Определи го најголемиот природен број k таков што постои број од видот $1!+2!+...+n!, (n\in\mathbb{N})$ чиј делител е бројот 3^k.

17. Со $p(n)$ а го означиме производот на сите цифри на бројот n. Определи ја вредноста на збирот

$$p(1001)+p(1002)+...+p(2011).$$

18. Докажи дека не постојат ненегативни цели броеви a,b,c,d такви што важи

$$2^a+4^b+5^c=2014^d.$$

19. Избрани се два различни трицифрени природни броја, а потоа за секој од нив се пресметува збирот на сите пет броја кои се добиваат со менување на редоследот на цифрите на тој број (на пример, ако еден од

тие броеви е 707, соодветниот збир е $770+77+77+770+707=2401$). Дали добиените збирови мора да се различни?

20.Определи го најмалиот можен број делители кој во множеството природни броеви може да ги има број од видот $|2016^m-36^n|$, каде m и n се природни броеви.

21.Дали постои природен број n таков што вкупниот број делители на бројот $n!$ во множеството природни броеви е делив со 2019?

22.За природниот број q ќе велиме дека е $K-$следбеник на природниот број n ако постои природен број p таков што $n+p^2=q^2$. Нека A е множеството природни броеви n кои имаат барем еден $K-$следбеник, но ниту еден $K-$следбеник на бројот n нема $K-$следбеник. Докажи дека

$$A=\{7,12\}\cup\{8m+3|m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\cup\{16m+4|m\in\mathbb{N}\}.$$

23.Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^x-3^y5^z=1009.$$

24.Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^{100}-y^{100}=100!.$$

Литература

[1] Mićić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
[2] Tošić, R., Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi Sad
[3] Малчески, Р. (2021). Теорија на броеви, Математички талент, Скопје
[4] Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
[5] Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Вовед во елементарна теорија на броеви, Армаганка, Скопје,
[6] Малчески, С. (2021). Збирка задачи по теорија на броеви, Математички талент, Скопје