№1. Pete has a deck of 1001 cards; the numbers $1, 2, \ldots, 1001$ are written on those cards with a blue pen, one number per card. Pete arranged the cards in a circle, with the blue numbers on their bottom sides. Then, for each card C, Pete considered 500 cards following C in the clockwise order and counted the number $f(C)$ of those whose blue numbers are larger than the blue number on C. Pete wrote the number $f(C)$ on the top side of C with a red pen. Prove that Basil, who sees all the red numbers on the cards, can determine the blue number on each card.

Solution. In both solutions, we denote $k = 500$ and $n = 2k + 1 = 1001$.

Suppose, for the sake of contradiction, that there exist two arrangements of Pete's cards which result in the same arrangement of red numbers. Let those arrangements be $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (in each string, we list the blue numbers in the clockwise order, starting from a fixed position).

Put $\mathcal{I} = \{i\colon a_i \neq b_i\}$; by our assumption, $\mathcal{I} \neq \varnothing$. Notice that the sets $N_A = \{a_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ and $N_B = \{b_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ coincide. Let a be the smallest element in N_A; then $a = a_i = b_j$ for some $i, j \in \mathcal{I}$ with $i \neq j$. Notice here that $a_i < b_i$ and $b_j < a_j$. Shifting the numeration (and, perhaps, swapping the two arrangements), we may assume that $i = 1$ and $j \leq k + 1$.

Consider now the red number at position 1. It should be equal to k minus the cardinality of each of the sets

$$A_1 = \{s\colon 2 \leq s \leq k+1 \quad \text{and} \quad a_s < a_1\} \quad \text{and} \quad B_1 = \{s\colon 2 \leq s \leq k+1 \quad \text{and} \quad b_s < b_1\}.$$

However, if $s \in A_1$, then $a = a_1 > a_s$; by definition of a, we get $b_s = a_s < a_1 < b_1$ and hence $s \in B_1$. Thus, $A_1 \subseteq B_1$. On the other hand, we have $j \in B_1$ (since $b_j = a < b_1$) and $j \notin A_1$ (since $a_j > a = a_1$), so the inclusion is strict. Hence $|A_1| < |B_1|$. A contradiction.

Marking scheme

(0) Only very initial observations and steps .... **0 points**

Examples of such observations and steps:

(a) A proof that, among two cards, one is in the neighborhood of the other;

(b) Just considering two blue arrangements providing the same collection of red numbers.

(c) Noticing, as in the above Remark, that Basil also knows the number of cards in the neighborhood of C whose blue numbers are smaller than that on C.

Scheme for current solution

(1.1) Focusing on the number a from Solution 1, i.e., the minimal (or maximal) number by which the two blue arrangements differ .... **1 point**

(1.2) One fails (or forgets) to show that the inclusion $A_1 \subset B_1$ is strict, but uses this result **at most 5 points**

№2. Let Ω be the circumcircle of a scalene triangle ABC. The line tangent at C to the circumcircle of triangle ABC meets the line AB at point D. A line passing through D intersects the segments AC and BC at K and L, respectively. Points M and N are chosen on the segment AB so that $AC \parallel NL$ and $BC \parallel KM$. Let NL and KM intersect at point P inside the triangle ABC. The line CP meets the circumcircle ω of MNP again at Q. Prove that the line DQ is tangent to ω.

Solution. Since $AC \parallel NL$ and $BC \parallel KM$, we get

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{DB}{DM},$$

which yields $DM \cdot DN = DA \cdot DB$. So the powers of D with respect to Ω and ω are equal. Denote by R the intersection point of the line CD and the line tangent to ω at Q, then

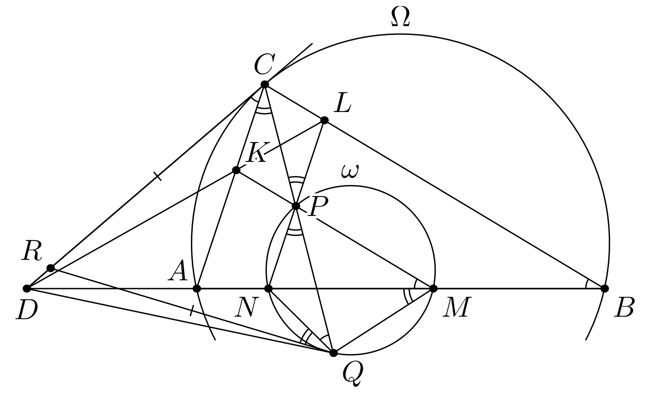

Figure 1

$$\angle RQP = \angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \angle QPN + \angle DBC = \angle CPL + \angle DCA = = \angle KCP + \angle DCA = \angle RCQ.$$

Hence $RC = RQ$ which implies than R and D both lie on the radical axis of Ω and ω. But this radical axis cannot be the line RD since otherwise it would pass through the point C which lies on Ω but outside ω. Therefore points R and D must coincide.

Marking scheme

Common points.

0. Proof that the powers of D with respect to Ω and ω are equal: .... **2 points**

Scheme for current solution

1. Proof that the triangle RQC is isosceles .... **3 points**

For an incomplete computational solution (Cartesian or complex coordinates, vector or trigonometry calculus, etc.) points can only be awarded if the partial results of computations have been formulated in an equivalent form of the geometric statements mentioned in the scheme above.

№3. Given positive integers a_1, a_2, …, a_k. Let $S(n)$ denote the number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ in nonnegative integers x_1, x_2, …, x_k. It is known that $S(n) \neq 0$ for all large enough n. Prove that $S(n+1) < 2S(n)$ for all large enough n.

Solution.

Lemma 1. The number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ in non-negative integers does not exceed $(n+1)^{k-1}$.

Proof. For a given n each solution $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ is uniquely determined by the sequence $(x_2, x_3, \dots, x_k)$. Since $0 \leqslant x_i \leq n$, the number of such sequences does not exceed $(n+1)^{k-1}$.

Lemma 2. If the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ admits a solution in non-negative integers for all large enough n, then for all large enough n the number of such solutions is at least cn^{k-1}, where c is positive real number not depending on n.

Proof. Since the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ is solvable in integers, the congruence $a_2x_2 + \dots + a_kx_k \equiv n \pmod{a_1}$ is also solvable; let $(t_2, \dots, t_k)$ be a soluton of this congruence.

The number of ways to choose a number $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ not exceeding a given M is at least $[\frac{M}{a_1}]$. Therefore there are at least $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \dots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$ sequences $(x_2, x_3, \dots, x_k)$ of non-negative integers satisfying $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ and $a_ix_i \leqslant \frac{n}{k}$ for $2 \leqslant i \leqslant k$. For each such sequence the number $n - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_kx_k \geq n - \frac{(k-1)n}{k}$ is non-negative and divisible by a_1, that is, each such sequence may be expanded to a solution $(x_1, \dots, x_k)$. Thus the number of solutions in question is at least $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \dots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$, and the lemma follows imediately.

Back to the solution of the problem, there exist for some integer n sequences $(r_1, \dots, r_k)$ and $(s_1, \dots, s_k)$ such that $a_1r_1 + \dots + a_kr_k = n$ and $a_1s_1 + \dots + a_ks_k = n+1$. Then the numbers $v_i = s_i - r_i$ satisfy $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 1$. For each n, to each solution $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n+1$ in non-negative integers we assign the solution $(x_1 - v_1, \dots, x_k - v_k)$ of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ in integers. If $x_i \geqslant v_i$ for all i, the numbers $x_i - v_i$ are also non-negative. Therefore the difference $S(n+1) - S(n)$ does not exceed the number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n+1$ where at least one of x_i is less than the respective v_i. For each i the number of such values of x_i is finite; for every such value $x_i = j$ the number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n+1$ with $x_i = j$, that is, $a_1x_1 + \dots + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_{i+1} + \dots + a_kx_k = n + 1 - ja_i$, does not exceed $(n+2-ja_i)^{k-2} \leqslant (n+2)^{k-2}$ by Lemma 1. Accordingly, the entire difference $S(n+1) - S(n)$ does not exceed $A(n+2)^{k-2}$ with some constant A. But $S(n)$ itself is, by Lemma 2, at least Cn^{k-1} for some positive C. It remains to note that $A(n+2)^{k-2} < Cn^{k-1}$ for all large enough n.

It follows from this solution that the factor 2 in the problem can be replaced by $1 + \varepsilon$ with any $\varepsilon > 0$.

Marking scheme

General

(0.1) The problem is solved for a_i pairwise coprime: .... **1 point** (not additive)

Scheme for current solution

(1.1) Lemma 1: .... **1 point** (additive with either of items (1.2), (1.3), (1.4))

(1.2) Lemma 2: .... **2 points**

(1.3) The correspondence between the solutions (x_i) and $(x_i - v_i)$ for two values of the RHS differing by 1: .... **1 point**

(1.4) (1.2) together with (1.3): .... **4 points**

№4. The sum of $n > 2$ nonzero real numbers, not necessarily distinct, is 0. For each of $2^n - 1$ ways to select several of those numbers (at least one) the sum of the selected numbers is calculated; all the resulting sums are written in line in non-increasing order. The first number in the line equals S. Determine the minimum possible value of the second number in the line.

Answer: $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Solution. Let us arrange all the numbers in non-decreasing order as follows:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m < 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k,$$

where $m+k = n$. Clearly, the largest number written in the line is equal to the sum of all positive numbers, i. e. $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = -a_1 - a_2 - \ldots - a_m$, and the second number in the line is obtained from S either by subtracting the smallest positive number b_1 or by adding the largest negative number a_m. Denote $c = \min\{b_1, |a_m|\}$, then, on the one hand, $S \geq kb_1 \geq kc$, and on the other hand, $S \geq m|a_m| \geq mc$. At least one of the numbers m and k is not less than $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, hence $c \leq \min\{\frac{S}{k}, \frac{S}{m}\} \leq \frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Therefore the second number in the line cannot be less than $S - c \geq S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

The second number in the line could be equal to $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$, for example, if we are given $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ numbers equal to $\frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, and $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ numbers equal to $-\frac{S}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Marking scheme.

Points withih each of the sections ,,Answer and example" and ,,Lower bound" are not additive. The final mark is equal to the sum of the highest scores of the sections.

Answer and example.

- Correct answer .... **0 points**
- Any finite number of examples where the second number is $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ .... **0 points**

1. An example where the second highest number equals $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ for all n of some patity .... **1 point**
2. An example where the second highest number equals $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ for all n .... **2 points**

Lower bound.

- A correct lower bound is obtained for any finite set of numbers n .... **0 points**

3. A correct lower bound is obtained for all numbers n of some parity .... **3 points**
4. A correct lower bound is obtained for all numbers n .... **5 points**

№5. We call a positive integer *good* if it can be presented in the form $ax^2 + bxy + cy^2$ with integral a, b, c, x, y and $b^2 - 4ac = -20$. Prove that the product of every two good numbers is also good.

Solution. In accordance with the other solutions we note that a good number is a number of the form $ax^2 + bxy + cy^2$, where $b^2 - ac = 5$.

Claim. A number n is good if and only if the only odd powers of primes in its prime factorization are those of primes p such that the congruence $x^2 \equiv -5 \pmod{p}$ is solvable.

Proof. Let $n = ax^2 + bxy + cy^2$, $d = (x, y)$, $x = dx'$, $y = dy'$, $(x', y') = 1$. Then $n = d^2n'$, and the primes with odd powers in the factorization of n' are the same as in that of n. Consider one such prime p. It does not divide at least one of the numbers x' and y'; let it be y'. We have $an' = (ax' + by')^2 + 5y'2$, i. e. $(ax' + by')^2 \equiv -5y'2 \pmod{p}$. Since $y' \not\equiv 0 \pmod{p}$, there is an integer α such that $ax' + by' \equiv \alpha y' \pmod{p}$. This α satisfies $\alpha^2 \equiv -5 \pmod{p}$. Thus we have proved that p satisfies the stated condition.

Conversely, let all the primes p, having odd powers in the factorization of n, are such that the congruence $x^2 \equiv -5 \pmod{p}$ is solvable. If $n' = p_1 \dots p_k$ is the product of all such primes, then $n = d^2n'$ for some integer d. Since all the congruences $x^2 \equiv -5 \pmod{p}_i$ are solvable, it follows from from Chinese Remainder Theorem that so is the congruence $x^2 \equiv -5 \pmod{n}'$. Let b be the solution of this congruence. This means that $b^2 - n'c = -5$ for some integer c. But then $n = n'd^2 + bd \cdot 0 + c \cdot 0^2$ is a good number, and the claim is proved.

To solve the problem it remains to note that the product of two numbers of the form described in the claim also has that form.

Marking scheme

General

(0.1) The identity $(x^2 + 5y^2)(z^2 + 5t^2) = (xz - 5yt)^2 + 5(xt + yz)^2$: .... **0 points**

(0.2) The statement is proved for two good numbers of the form $ax^2+bxy+cy^2$ with equal a:**2 points** (not additive)

(3.1) Proved that if a prime p divides $ax^2 + bxy + cy^2$ but not x or y then -5 is a quadratic residue mod$p$: .... **1 point**

(3.2) Proved that all n containing only primes p such that -5 is a quadratic residue modulo p are good **3 points**

All the points in the scheme for the third solution are additive.

Points from schemes for different solutions are not additive.

№6. Several blue and green napkins (possibly of different sizes) with vertical and horizontal sides are placed on the plane. It turned out that every two napkins of different colours can be intersected by a vertical or horizontal line (possibly on the border). Prove that one can choose a colour, two horizontal lines, and one vertical line, so that every napkin of the chosen colour is intersected by at least one chosen line.

Solution. Notation. Throughout the solution we suppose that we work in the Cartesian plane, with the axis OX directed horizontally and OY directed vertically. The orthogonal projections onto axes OX (horizontal) and OY (vertical) will be denoted π_X and π_Y respectively. Clearly a vertical line intersecting all the napkins $B_1, \dots, B_k$ exists if and only if the segments $\pi_x(B_1), \dots, \pi_X(B_k)$ have a common point; henceforth we will say, for sake of brevity, that these segments are *pierced* by a point (and the napkins are *pierced* by a line).

For two segments ℓ_1 and ℓ_2 on a line we will call their *hull* $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ the smallest segment containing both ℓ_1 and ℓ_2. In other words, $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ is the union of ℓ_1 and ℓ_2, if they overlap, and the union of ℓ_1, ℓ_2, and the interval between, if they do not.

We make use of the following

Lemma 1 (one-dimensional Helly's theorem). If in a finite family of segments in a line every two segments overlap, then there is a point piercing them all.

(Generally speaking, the theorem holds even for infinite families, but we have no time for subtleties.)

Proof. Consider the segment with the leftmost right end $\ell_1 = [a, b]$ and the segment eith the rightmost left end $\ell_2 = [c, d]$. They overlap; in particular, that means $b \geqslant c$. But then the right end of any segment is no further left than b, while its left end is no frther right than c, that is, the segment contains all the points of the segment $[c, b]$ (that segment is possibly degenerate, but not empty). □

We will use Lemma 1 from the previous solution.

Say that a family of napkins is *good* if all napkins in the family can be pierced by a horizontal line; otherwise the family is *bad*. According to the Lemma, if a family is bad, then it contains two napkins whose projections onto the y-axos are disjoint.

Every vertical line ℓ partitions the napkins into three groups: the group $I(\ell)$ consisting of the napkins pierced by ℓ, the group $L(\ell)$ consisting of all napkins lying strictly to the left of ℓ, and the group $R(\ell)$ consisting of all napkins lying strictly to the right of ℓ.

Suppose that, for some vertical line ℓ, there exists a color (say, blue) such that the family of blue napkins in $L(\ell)$ is good, and the family of blue napkins in $R(\ell)$ is also such. If a and b are horizontal lines piercing those two families, then the three lines ℓ, a, and b form a desired collection of three lines piercing all blue napkins. So, in the dequel, we assume that there is no such line.

Consider the rightmost vertical line ℓ_0 such that the family of blue napkins in $L(\ell)$, as well as the family of green napkins in $L(\ell)$, is good. This means that there are two napkins of the same color (say, blue napkins W_1 and W_2) such that their y-projections are disjoint, and after shifting ℓ_0 rightwards to a line ℓ, both napkins fall into $L(\ell)$. So both napkins lie (non-strictly) to the left of ℓ_0. Without loss of generality, we assume that the y-projection of $@_1$ is above that of W_2.

By our assumption, the family of green napkins in $R(\ell)$ is bad (since the family of green napkins in $L(\ell)$ is good); so $R(\ell)$ comtains two green napkins b_1 and b_2 whose y-projections are disjoint. Without loss of generality, we assume that the y-projection of B_1 is above that of B_2.

Not losing generality again, we assume that the bottom point of B_1 is no higher than that of W_1. Then the y-projections of W_1 and B_2 are disjoint. But their x-projections are also disjoint, since one lies (non-strictly) to the left of ℓ_0, while the other lies strictly to the right of it. Hence these napkins fail to satisfy the problem requirements. A contradiction.

Marking scheme

(0.1) Consideration of any particular cases, as well as (partially) wrong arguments
.... **0 points**

(0.2) Initial steps, such as: reformulation of the problem in terms of x- and y-projections, or formulating and proving Lemma 1, etc. .... **0 points**

Scheme for current solution

(1.1) Describing (as in Solution 2) a sufficinnt confition that a vertical line ℓ can be augmented by two horizontal ones in order to get a desired triple .... **1 point**

(1.2) If (1.1): is present, by means of choosing the rightmost/leftmost/etc. element, or via moving a vertical line ℓ, one chooses a line ℓ_0 sering the aims of Solution 2 ....**2 points**

№1. У Пети есть 1001 карточка, на которых написаны синей ручкой числа $1, 2, \dots, 1001$; на каждой карточке написано ровно одно число. Петя выложил карточки по кругу синими числами вниз. Затем для каждой карточки C Петя рассмотрел 500 карточек, следующих за C по часовой стрелке, и нашёл количество $f(C)$ тех из них, на которых синие числа больше, чем синее число на C. Число $f(C)$ Петя написал на верхней стороне карточки C красной ручкой. Докажите, что Вася, видя только все красные числа, может восстановить, какое синее число на какой карточке написано.

Решение. В решениях ниже мы используем обозначения $k = 500$ и $n = 2k + 1 = 1001$.

Предположим, что утверждение задачи неверно; это значит, что для некоторых двух расположений синих чисел получается одно и то же расположение красных. Пусть эти синие расположения — это $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ (в каждом случае перечислены синие числа в порядке обхода по часовой стрелке, начиная с фиксированного места).

Пусть $\mathcal{I} = \{i \colon a_i \neq b_i\}$; по нашему предположению, $\mathcal{I} \neq \varnothing$. Заметим, что множества $N_A = \{a_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ и $N_B = \{b_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ совпадают. Пусть a — наименьший элемент в N_A; тогда $a = a_i = b_j$ для некоторых $i, j \in \mathcal{I}$, причём $i \neq j$. Отметим, что $a_i < b_i$ и $b_j < a_j$. Сдвигая нумерацию и, возможно, меняя расположения местами, мы можем считать, что $i = 1$ и $j \leqslant k + 1$.

Рассмотрим теперь красное число на позиции 1. Оно должно равняться k минус мощности каждого из множеств

$$A_1 = \{s \colon 2 \leqslant s \leqslant k+1 \quad \text{и} \quad a_s < a_1\} \quad \text{и} \quad B_1 = \{s \colon 2 \leqslant s \leqslant k+1 \quad \text{и} \quad b_s < b_1\}.$$

Однако, если $s \in A_1$, то $a = a_1 > a_s$; отсюда по определению числа a получаем $b_s = a_s < a_1 < b_1$, а значит, $s \in B_1$. Таким образом, $A_1 \subseteq B_1$. С другой стороны, имеем $j \in B_1$ (поскольку $b_j = a < b_1$) и $j \notin A_1$ (поскольку $a_j > a = a_1$), так что включение $A_1 \subset B_1$ строгое. Итак, $|A_1| < |B_1|$. что невозможно.

Схема оценки

(0) Только самые начальные шаги .... **0 баллов**

Примеры таких начальных шагов:

(a) Доказательство того, что среди любых двух карточек одна лежит в окрестности другой.

(b) Только рассмотрение двух гипотетических расположений синих чисел, дающих одно и то же расположение красных.

(c) Замечание о том, что Вася знает количество карточек в окрестности C, синие числа на которых меньше, чем число на C.

Схема данного решения

(1.1) Исследуется число a из первого решения, т. е. наименьшее (или наибольшее) число, по которому различаются два расположения синих чисел .... **1 балл**

(1.2) Неверно доказан (или не доказан) факт, что включение $A_1 \subset B_1$ строгое, но этот факт используется в решении .... **не более 5 баллов**

№2. Касательная в точке C к окружности Ω, описанной около неравнобедренного треугольника ABC, пересекает прямую AB в точке D. Через точку D проведена прямая, пересекающая отрезки AC и BC в точках K и L соответственно. На отрезке AB отметили точки M и N так, что $AC \parallel NL$ и $BC \parallel KM$. Пусть NL и KM пересеклись в точке P, лежащей внутри треугольника ABC. Прямая CP во второй раз пересекает окружность ω, описанную около треугольника MNP, в точке Q. Докажите, что прямая DQ касается ω.

Решение. Заметим, что из параллельностей $AC \parallel NL$, $BC \parallel KM$ следует, что

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{DB}{DM},$$

то есть $DM \cdot DN = DA \cdot DB$, поэтому степень точки D относительно ω и Ω равны.

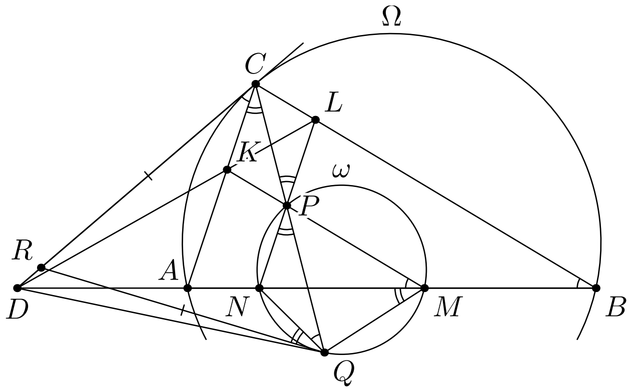

Рис. 1

Пусть R — точка пересечения прямой CD и касательной, проведённой в точке Q к ω, тогда

$$\begin{aligned}\angle RQP = \angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \\ = \angle QPN + \angle DBC = \angle CPL + \angle DCA = \\ = \angle KCP + \angle DCA = \angle RCQ.\end{aligned}$$

Следовательно, $RC = RQ$, что означает, что точки R и D обе лежат на радикальной оси окружностей Ω и ω. Однако эта радикальная ось не может являться прямой RD, иначе она бы проходила через точку C, которая лежит на Ω, но снаружи ω. Следовательно, точки R и D совпадают.

Схема оценивания.

Общие баллы.

0. Доказано, что степень точки D относительно Ω и ω равны: .... **2 балла**

Схема для данного решения.

1. Доказано, что треугольник RQC равнобедренный .... **3 балла**

За вычислительное решение (в координатах, в комплексных числах, в векторах, тригонометрическое, и т.д.), не доведённое до конца, можно получить баллы только, если результаты промежуточных вычислений сформулированы в виде равносильных геометрических утверждений, указанных в схеме оценивания.

№3. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим через $S(n)$ количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Известно, что $S(n) \neq 0$ для всех достаточно больших n. Докажите, что $S(n+1) < 2S(n)$ для всех достаточно больших n.

Решение.

Лемма 1. Количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах не превосходит $(n+1)^{k-1}$.

Доказательство. При данном n решение $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ однозначно задаётся набором $(x_2, x_3, \ldots, x_k)$. Однако $0 \leqslant x_i \leq n$, поэтому таких наборов не более $(n+1)^{k-1}$.

Лемма 2. Если уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ имеет решение в целых неотрицательных числах при всех достаточно больших n, то при всех достаточно больших n количество таких решений не менее cn^{k-1}, где c – положительное число, не зависящее от n.

Доказательство. Поскольку уравнение $a_1x_1+\cdots+a_kx_k = n$ разрешимо в целых числах, разрешимо и сравнение $a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \equiv n \pmod{a_1}$; пусть $(t_2, \ldots, t_k)$ – решение этого сравнения.

Среди целых неотрицательных чисел, не превосходящих данного M, выбрать число $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ можно не менее, чем $[\frac{M}{a_1}]$ способами. Поэтому существует не менее $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \cdots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$ наборов $(x_2, x_3, \ldots, x_k)$ целых неотрицательных чисел, в которых $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ и $a_ix_i \leqslant \frac{n}{k}$ при $2 \leqslant i \leqslant k$. Для каждого такого набора число $n - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_kx_k \geq n - \frac{(k-1)n}{k}$ неотрицательно и кратно a_1, то есть каждый такой набор можно дополнить до некоторого решения $(x_1, \ldots, x_k)$. Таким образом, количество решений уравнения не менее $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \cdots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$, откуда немедленно следует утверждение леммы.

Перейдём к решению задачи. По условию для некоторого натурального n существуют наборы целых чисел $(r_1, \ldots, r_k)$ и $(s_1, \ldots, s_k)$, для которых $a_1r_1 + \cdots + a_kr_k = n$ и $a_1s_1 + \cdots + a_ks_k = n+1$. Вычитая, получаем, что числа $v_i = s_i - r_i$ удовлетворяют соотношению $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 1$. При каждом n сопоставим каждому решению $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n+1$ в целых неотрицательных числах решение $(x_1 - v_1, \ldots, x_k - v_k)$ уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$. Если $x_i \geqslant v_i$ при всех i, числа $x_i - v_i$ тоже будут неотрицательными. Таким образом, разность $S(n+1) - S(n)$ не превосходит количества решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n+1$, в которых хотя бы одно из x_i не превосходит соответствующего v_i. Для каждого i таких значений x_i конечное число; для каждого такого значения $x_i = j$ количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n+1$ с $x_i = j$, то есть $a_1x_1 + \cdots + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_{i+1} + \cdots + a_kx_k = n+1-ja_i$, по лемме 1 не превосходит $(n+2-ja_i)^{k-2} \leqslant (n+2)^{k-2}$. Поэтому и вся разность $S(n+1) - S(n)$ не превосходит $A(n+2)^{k-2}$ для некоторого постоянного A. А само $S(n)$ по лемме 2 не меньше Cn^{k-1} для некоторого положительного C. Осталось заметить, что $A(n+2)^{k-2} < Cn^{k-1}$ при всех достаточно больших n.

Из приведённого решения видно, что множитель 2 в условии задачи можно заменить на $1+\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

Схема оценивания

Общие баллы

(0.1) Задача решена для попарно взаимно простых a_i: .... **1 балл** (не суммируется с остальными)

Схема для данного решения

(1.1) Лемма 1: .... **1 балл** (суммируется с любым из пунктов (1.2), (1.3), (1.4))

(1.2) Лемма 2: .... **2 балла**

(1.3) Соответствие между решениями (x_i) и $(x_i - v_i)$ для правых частей, отличающихся на 1: .... **1 балл**

(1.4) (1.2) вместе с (1.3): .... **4 балла**

№4. Сумма $n > 2$ ненулевых вещественных чисел (не обязательно различных) равна нулю. Для каждого из $2^n - 1$ способов выбрать несколько (не менее одного) из этих чисел подсчитали сумму выбранных чисел и все полученные $2^n - 1$ сумм выписали в строку в невозрастающем порядке. Первое число в строке равно S. Найдите наименьшее возможное значение второго числа в строке.

Ответ: $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Решение. Занумеруем все заданные числа в порядке возрастания следующим образом:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m < 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k,$$

где $m + k = n$. Очевидно, что наибольшее число, записанное в строку, равно сумме всех положительных чисел, т. е. $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = -a_1 - a_2 - \ldots - a_m$, а следующее получается из S либо вычитанием наименьшего положительного числа b_1, либо прибавлением наибольшего отрицательного числа a_m. Обозначим $c = \min\{b_1, |a_m|\}$, тогда, с одной стороны, $S \geq kb_1 \geq kc$, а с другой, $S \geq m|a_m| \geq mc$. По крайней мере одно из чисел m и k не меньше, чем $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, значит, верна оценка $c \leq \min\{\frac{S}{k}, \frac{S}{m}\} \leq \frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Соответственно, второе число в строке не может быть меньше, чем $S - c \geq S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Второе число в строке может равняться $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$, например, если изначально были заданы $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чисел, равных $\frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, и $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чисел, равных $-\frac{S}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Схема оценивания.

Баллы внутри каждого из разделов „Ответ и пример” и „Оценка” не суммируются. Итоговая оценка равна сумме наибольших баллов каждого из разделов.

Ответ и пример.

• Верный ответ .... **0 баллов**

• Любое конечное количество примеров, в которых второе число равно $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ ...... **0 баллов**

1. Пример, в котором второе число равно $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ для одной чётности n .... **1 балл**

2. Пример, в котором второе число равно $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ всех n .... **2 балла**

Оценка.

• Верная оценка, полученная для любого конечного набора чисел n .... **0 баллов**

3. Верная оценка, полученная для всех чисел n одной чётности .... **3 балла**

4. Верная оценка, полученная для всех n .... **5 баллов**

№5. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представляется в виде $ax^2+bxy+cy^2$, где a, b, c, x, y – целые числа и $b^2-4ac=-20$. Докажите, что произведение двух хороших чисел – тоже хорошее число.

Решение. Заметим, что хорошее число – это число вида $ax^2+bxy+cy^2$, где $b^2-ac=5$.

Предложение. Число n хорошее тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители в нечётных степенях входят лишь простые p, для которых разрешимо сравнение $x^2\equiv-5 \pmod p$.

Доказательство. Пусть $n=ax^2+bxy+cy^2$, $d=(x,y)$, $x=dx'$, $y=dy'$, $(x',y')=1$. Тогда $n= = d^2n'$, и разложение n' на простые множители содержит в нечётных степенях те же числа, что и n. Рассмотрим одно такое простое p. Хотя бы одно из чисел x' и y' не кратно p; пусть это y'. Имеем $an'=(ax'+by')^2+5y'2$, то есть $(ax'+by')^2\equiv-5y'2 \pmod p$. Поскольку $y'\not\equiv 0 \pmod p$, существует целое α, для которого $ax'+by'\equiv\alpha y' \pmod p$. Для этого α имеем $\alpha^2\equiv-5 \pmod p$. Таким образом, мы доказали, что n удовлетворяет сформулированному критерию.

Обратно, пусть все простые p, входящие в n с нечётным показателем, таковы, что разрешимо сравнение $x^2\equiv-5 \pmod p$. Если $n'=p_1\dots p_k$ – произведение всех таких простых, то $n=d^2n'$ при некотором целом d. Поскольку разрешимы все сравнения $x^2\equiv-5 \pmod p)_i$, по китайской теореме об остатках разрешимо и сравнение $x^2\equiv-5 \pmod n)'$. Пусть b – решение этого сравнения. Это значит, что $b^2-n'c=-5$ для некоторого целого c. А тогда $n=n'd^2+bd\cdot0+c\cdot0^2$ – хорошее число. Это завершает доказательство предложения.

Для решения задачи осталось заметить, что произведение двух чисел вида, описанного в предложении, тоже имеет такой вид.

Схема оценивания

Общие баллы

(0.1) Тождество $(x^2+5y^2)(z^2+5t^2)=(xz-5yt)^2+5(xt+yz)^2$: ....**0 баллов**

(0.2) Утверждение доказано для двух хороших чисел вида $ax^2+bxy+cy^2$ с одинаковыми a: **2 балла**
(не суммируется с остальными)

Схема для данного решения

(3.1) Доказано, что если $ax^2+bxy+cy^2$ делится на p, а x и y не делятся, то -5 — квадратичный вычет mod$p$: .... **1 балл**

(3.2) Доказано, что хороши все числа, содержащие только простые p, для которых -5 — квадратичный вычет ....**3 балла**

Все баллы из схемы третьего решения суммируются.

Баллы из схем оценивания разных решений не суммируются.

№6. На плоскость положили несколько синих и зелёных прямоугольных салфеток (возможно, разных размеров) с вертикальными и горизонтальными сторонами. Оказалось, что любые две салфетки разного цвета можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой (возможно, по границе). Докажите, что можно выбрать цвет, две горизонтальных прямых и одну вертикальную прямую так, что каждую салфетку выбранного цвета пересекает хотя бы одна из выбранных прямых.

Решение. Обозначения. Операции ортогональной проекции на оси OX и OY обозначим π_X соответственно π_Y. Очевидно, для салфеток $B_1, \ldots, B_k$ найдется пересекающая их все прямая, параллельная OY, тогда и только тогда, когда отрезки $\pi_X(B_1), \ldots, \pi_X(B_k)$ содержат общую точку; далее для краткости говорим *протыкаются* точкой (а для салфеток *протыкаются* прямой).

Для двух отрезков ℓ_1 и ℓ_2 на прямой их *оболочкой* $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ будем называть наименьший отрезок, содержащий ℓ_1 и ℓ_2. Иными словами, $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ – объединение ℓ_1 и ℓ_2 если они пересекаются, объединение ℓ_1, ℓ_2 и интервала между ними, если ℓ_1 и ℓ_2 не пересекаются.

Нам понадобится

Лемма 1 (одномерная теорема Хелли). Если в (конечном) семействе отрезков на прямой любые два отрезка пересекаются, то существует точка, протыкающая все отрезки.

Вообще говоря, теорема верна и без условия конечности, но мы сейчас не будем заниматься этими тонкостями.

Доказательство. Рассмотрим отрезок с самым левым правым концом $\ell_1 = [a, b]$ и самым правым левым концом $\ell_2 = [c, d]$. То что они пересекаются означает, в частности, что $b \geqslant c$. Но тогда любой отрезок имеет правый конец не левее b и левый конец не правее c, то есть содержит все точки из отрезка $[c, b]$ (возможно, вырожденного в точку, но не пустого). $\square$

Вернемся к решению задачи.

Будем называть семейство салфеток *хорошим*, если все салфетки в семействе протыкаются одной горизонтальной прямой, и *плохим* в противном случае. По Лемме 1, плохое семейство содержит две салфетки, проекции которых на ось OY не пересекаются.

Относительно каждой вертикальной прямой ℓ все салфетки делятся на три типа: проткнутые ею, лежащие строго левее, и лежащие строго правее; обозначим множества таких салфеток через $I(\ell)$, $L(\ell)$ и $R(\ell)$ соответственно. Если для какого-то цвета (для определенности – синего) для некоторой прямой ℓ оба семейства — состоящее из синих салфеток в $L(\ell)$, и состоящее из синих салфеток в $R(\ell)$, — оказались хорошими, то задача решена: требуемые три прямые — это ℓ вместе с двумя прямыми, протыкающими все салфетки упомянутых двух семейств. Предположим, что такой прямой ℓ не нашлось.

Рассмотрим самую правую прямую ℓ_0, для которой как семейство синих, так и семейство зелёных салфеток в $L(\ell_0)$ – хорошие. То что ℓ_0 самая правая, означает, что при ее сдвиге вправо для какого-то из цветов (пусть для определенности для синего) есть две салфетки этого цвета, лежащих (нестрого) левее ℓ_0, чьи проекции на ось OY не пересекаются. Обозначим эти салфетки W_1 и W_2, пусть для определенности проекция W_1 на ось OY выше, чем проекция W_2. Но наше предположение о прямой ℓ_0 означает, что семейство зелёных салфеток в $R(\ell_0)$ – плохое. Тогда есть две зелёных салфетки B_1 и B_2, лежащие строго правее ℓ_0, проекции которых на ось OY не пересекаются. Пусть для определенности проекция B_1 на OY выше проекции B_2. Опять же, не умаляя общности, пусть нижняя граница B_1 не выше нижней границы W_1. Тогда салфетки W_1 и B_2 нельзя проткнуть одновременно ни горизонтальной ни вертикальной прямой – противоречие с условием.

Схема оценивания

(0.1) Рассмотрения любых частных случаев, равно как и (частично) неверные рассуждения .... **0 баллов**

(0.2) Начальные шаги, такие как переформулировка задачи в терминах проекций на оси, формулировка и доказательство Леммы 1 и т.п. .... **0 баллов**

Схема для данного решения

(1.1) Описано (использованное в решении) достаточное условие того, что вертикальную прямую ℓ можно дополнить двумя горизонтальными так, чтобы эти три прямых протыкали все салфетки одного цвета .... **1 балл**

(1.2) При наличии пункта (1.1): с использованием принципа крайнего (как в решении), либо же при помощи движения прямой ℓ слева направо выбрана прямая ℓ_0, подходящая под требования решения 2 . . . . **2 балла**