МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 1 (2017), 21–32

ГОЛЕМАТА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

Стефан Мирчевски [1]

1. ВОВЕД

Значењето на теоријата на броеви и општо, фасцинираноста со поимот број потекнува уште од времето на Вавилонците. Илјада години пред Питагора математичарите знаеле како систематски да ги најдат питагорините тројки, т.е. оние природни броеви a,b,c за кои важи равенството $a^2+b^2=c^2$.

Во овој труд се разгледува настан кој ја доловува математиката од XVII век, т.е. развојот на теоријата на броеви. Целокупниот напредок во оваа област се поврзува со појавата на францускиот математичар Пјер де Ферма (Pierre de Fermat).

Слика 1. Пјер де Ферма

Тој бил роден на 20 август 1601 година во градот Бомон де Ломањ (Beamount de Lomagne), недалеку од Тулуз. Кратко време студирал на универзитетот во Тулуз, но и на универзитетите во Орлеан и Бордо. Уште како студент покажувал големи математички способности, а во 1629 год. Направил реставрација на делото на Аполониј, познато како „Plane loci“ (во слободен превод: „Значајни точки во рамнина“).

Под притисок на фамилијата, Ферма морал да ја започне својата кариера во државните служби. Бил ефикасен државен службеник кој во целост ги извршувал сите должности. Во склоп со неговата работа, секогаш им излегувал во пресрет на луѓето и им помагал во решавањето на нивните проблеми. Многу брзо напредувал во кариерата, па станал почесен член во општествената елита и добил „де“ во презимето. Немал амбиции учество во политиката, работата си ја извршувал чесно, а во слободното време се занимавал со математика.

2. ЗАГАТКА ШТО ГО ЗБУНИЛА СВЕТОТ

Големата теорема на Ферма (натаму ќе ја означуваме со ГТФ), која уште е позната и како *Последната теорма на Ферма,* е многу значаен дел од теоријата на броеви. Таа била инспирација за генерации и генераици математичари, професионалци и аматери, кои се обидувале да го решат проблемот. Тие напори довеле до создавање на моќна теорија со многу длабоки и важни резултати.

Сѐ започнало со преводот на Клод Баше на Диофантовата „*Аритметика*". Ферма добил идеја токму од Баше, кој покрај тоа што бил лингвист, бил ум кој поставувал совршени математички загатки. Додека ја проучувал втората книга од Аритметиката, Ферма запазил многу тврдења, задачи и нивни решенија кои се поврзуваат со Питагорината теорема и питагорините тројки. На пример, Диофант го дискутирал постоењето на некои тројки броеви кои формираат правоаголни триаголници кај кои разликата на катетите x и y е еднаква на 1. На пример, за $x=20$, $y=21$ и $z=29$, важи $20^2+21^2=29^2$. Ферма бил изненаден од бројноста и од видовите на веќе постоечките питагорини тројки. Бил и свесен дека векови претходно Евклид приложил доказ со кој потврдил дека постојат бесконечно многу вакви тројки. Барајќи нешто што би се допишало кон широката листа на питагорини тројки на Диофант, почнал да си игра со Питагорината равенка. Одеднаш, во еден момент на генијалност, напишал равенка, слична на Питагорината равенка. Наместо $x^2+y^2=z^2$, Ферма ја смислил оваа варијанта: $x^3+y^3=z^3$. Со оваа модификација и многуте обиди за решавање, Ферма потврдил дека е многу тешко да се најдат два природни броја такви што збирот на нивните трети степени е еднаков на трет степен на некој природен број. Се поставило прашањето, дали со оваа мала трансформација, Питагорината равенка се сведува од равенка со бесконечно многу решенија во равенка без решенија? Ферма продолжил со зголемување на степените, со тоа што добивал нови равенки за кои повторно чувствувал дека многу тешко е да се најдат три природни броеви кои би ја задоволувале конкретната равенка. Во општа форма, равенката изгледала вака: $x^n+y^n=z^n, \quad n=3,4,\ldots$

Ферма со сигурност тврдел, дека никаде, во целиот бесконечен универзум на броеви не може да се најде *тројка броеви на Ферма*. На маргините на Диофантовата Аритметика, тој запишал:

„Невозможно е да се напише трет степен (куб) на некој број како збир од кубови на два броја или четврти степен на број како збир од четврти степени на два броја, или, општо, кој било број на степен поголем од два како збир од броеви на истиот тој степен.“

Непосредно по оваа забелешка, на маргините запишал и дополнителен коментар кој предизвикал вечно прогонување на сите идни математичари. *„Имам навистина величествен доказ на оваа теорема, но маргината е многу тесна за да го собере.“*

Оваа теорема Ферма ја формулирал во 1637 година. Иако не го објавил доказот што „не го собирал на маргините“, сепак објавил доказ за $n=4$. (Тоа е единствен доказ спроведен со наполно елементарни методи.) Неговиот метод е познат како *метод на бесконечно спуштање*. Идејата на доказот за постоење решенија на равенката $x^4+y^4=z^4$, се состои во претпоставување дека равенката има решение за некои природни броеви $x=X_1, y=Y_1, z=Z_1$ и да покаже дека постојат природни броеви $x=X_2, y=Y_2, z=Z_2$, такви што $Z_2<Z_1$. Повторувајќи ја оваа постапка, се добива бесконечна опаѓачка низа од природни броеви. Бидејќи мора да постои најмало можно решение, се добива контрадикција.

Скоро цели 30 години подоцна, додека ги извршувал судските задолженија во градот Кастр, Ферма бил во сериозно лоша здравствена состојба. На 9 јануари 1665 година ја потпишал својата последна пресуда и три дена подоцна починал. Сè уште изолирана од париските школи за математичари, ГТФ била пред прагот на заборав. Благодарение на неговиот најстар син Самуел, денес знаеме нешто за големото откритие на Ферма и општо, за целиот придонес во теоријата на броеви. Да не бил Самуел, енигмата позната под името ГТФ би исчезнала за миг, заедно со својот творец ([5]).

Пет години Самуел ги собирал разните забелешки и писма, но и проучувајќи ги напишаните редови по маргините на книгата „Аритметика“. Забелешката за теоремата на Ферма, која стоела на самиот крај од оваа книга, била само едно од многуте тврдења што ги содржела самата книга, па Самуел, на своја одговорност решил да ги објави забелешките во специјално издание на „Аритметика“. Во 1670 година во Тулуз е издадена книга со наслов *„Диофантовата аритметика со забелешки на Пјер де Ферма“*. Теоремата на Ферма претставува проблем со голема тежина, а сепак, претставен во облик препознатлив дури и за дете. Во својата книга *„Последен проблем“*, Ерик Бел рекол: *Цивилизацијата побрзо ќе дојде до својот крај отколку да се реши теоремата на Ферма.*

Овој проблем покрај математичарите, ги заинтересирал и писателите. Имено, во 1958 година во приказната *„Ѓаволот и Сајмон Флаг“* од авторот Артур Поргес, која била дел од антологијата со наслов *„Договор со ѓаволот“*, се споменува Последната теорема на Ферма. Всушност, се надмудруваат ѓаволот и Сајмон Флаг со поставување загатка, каде што влог е душата на Сајмон Флаг или сто илјади долари. Се разбира, ѓаволот го изгубил облогот.

3. ОБИДИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА ГТФ НИЗ ВЕКОВИТЕ

Со текот на времето на докажување на теоремата работеле многу славни математичари и теоремата ја потврдиле за некои посебни случаи. По нешто повеќе од 100 години, во 1753 година, Ојлер го користел методот на бесконечно спуштање од случајот $n=4$, за случајот $n=3$. За волја на вистината, овој доказ бил дефектен, но тоа било забележано дури по еден век. Во што се состоел Ојлеровиот доказ? Ојлер претпоствил дека постои решение (x, y, z) на равенката $x^3+y^3+z^3=0$, каде што x, y, z се ненулти цели броеви што се заемно прости и не сите позитивни ([2]). Еден од нив мора да е парен, додека другите два мора да се непарни броеви. Можеме да претпоставиме дека z е парен. Бидејќи x и y се непарни, тие не можат да бидат еднакви, зашто кога би било $x=y$, тогаш би имале $2x^3=z^3$ што би повлекувало дека x е парен, а тоа би противречело на претпоставката дека x е непарен. Од тоа што x и y се непарни, нивниот збир и разлика се парни броеви, т.е.

$$x+y=2u \text{ и } x-y=2v,$$

при што u и v се ненулти заемно прости цели броеви и имаат различна парност (еден е парен, а другиот е непарен). Бидејќи $x=u+v$ и $y=u-v$, следува дека

$$-z^3=(u+v)^3+(u-v)^3=2u(u^2+3v^2),$$

а од тоа што u и v имаат различна парност, следува дека $u^2 + 3v^2$ е секогаш непарен број. Имајќи предвид дека z е парен, имаме дека u е парен, а v е непарен број. Бидејќи u и v се заемно прости, најголемиот заеднички делител на $2u$ и $u^2 + 3v^2$ е или 1 (случај А) или 3 (случај Б). Доказот натаму се заснова на следнава лема и од неа произлегува ГТФ ([6]).

Лема. *Ако заемно простите броеви* u и v *го имаат својството дека бројот* $u^2 + 3v^2$ *е куб на цел број, тогаш постојат цели броеви* s и t такви што $u = s\cdot(s^2 - 9t^2)$, $v = 3t\cdot(s^2 - t^2)$.

Но, доказот на оваа лема е дефектен. Ојлер ја докажува оваа лема забележувајќи дека

$$u^2 + 3v^2 = (u + v\sqrt{-3})(u - v\sqrt{-3}\,).$$

Потоа тој пишува дека, бидејќи по услов левата страна е куб, следува дека и двата множители на десната страна се точни кубови. Поспецијално, $u + v\sqrt{-3} = (s + t\sqrt{-3}\,)^3$, каде што s и t се цели броеви. (Итн.) Но, од каде следува дека:

1) s и t се цели?!?

2) $u + v\sqrt{-3}$ и $u - v\sqrt{-3}$ (во прстенот $D_3 = \{u + v\sqrt{-3} \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$) се заемно прости?!?

(Се покажува, всушност, дека за броевите од видот $u + v\sqrt{-3}$ не важи ОТАР; на пример: $4 = 2\cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ а броевите 2 и $1 \pm \sqrt{-3}$ се неразложливи.)

Важен прилог во решавањето на ГТФ имала и една жена – Софи Жермен (Sophie Germain, 1776-1831). Нејзината нова стратегија за приод кон проблемот била инспирирана од Гаус, а таа му ја опишала како *општ приод кон проблемот*. Нејзината цел била да разгледа многу случаи одеднаш. Всушност, таа разгледувала прости броеви p такви што и $2p+1$ се прости. За вредности на n еднакви на овие (наречени *Жерменови прости броеви*), таа сметала дека ќе има успех во докажувањето на оваа теорема. Нејзиниот метод го доживеал својот комплетен успех во 1825 година, благодарение на Густав Дирихле (1805-1859) и Адриен Мари Лежандр (1752-1833). Двајцата, независно еден од друг, во 1823 година, ја докажале ГТФ за случајот $n=5$. Целиот свој доказ дека овој случај нема позитивни цели решенија, го базирале врз трудот на Жермен. Ако би се разгледувала равенката на Ферма $x^5+y^5=z^5$, тогаш еден од броевите x,y,z е парен а другиот е делив со 5. Постоеле два случаи: првиот случај – кога бројот кој е делив со 5 е парен и вториот случај – кога парниот број и оној број кој е делив со 5 се различни. Првиот случај го докажал Дирихле, а вториот случај – Лежандр и со тоа доказот бил комплетиран.

Во 1839 година, Французите направиле уште еден обид. Габриел Ламе (Gabriel Lamé, 1795–1870) го унапредил методот на Жермен и го докажал случајот $x^7+y^7=z^7$. Во исто време и Ламе и Коши тврделе дека имаат доказ на ГТФ, но многу брзо се покажало дека нивните докази се погрешни. Тоа го покажал германскиот математичар Кумер (Ernst Eduard Kummer, 1810-1893), кој дал најголем придонес кон решавањето на ГТФ сѐ до осумдесеттите години на 20-тиот век. Кумер кажал три клучни работи:

- Единствената факторизација не е точна, во принцип, за $D_p\left[D_p=a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots+a_{p-1}r^{p-1}\right]$. Тоа било потврдено во 1971 година за $p\geq 23$ ([1]).
- Единствената факторизација може да биде „спасена“ во D_p со воведување на „идеални броеви“.
- Со користење на единствената факторизација, ГТФ може да биде докажана за $p<100$.

Ќе наведеме два примера во кои е илустрирана идејата на Кумер.

1) $D=2\mathbb{Z}$, парни цели броеви. Тогаш $100=2\cdot 50=10\cdot 10$, при што $2,10,50$ се прости броеви во D.
2) $D=\{a+b\sqrt{5}i \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Тогаш $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)$. Се покажува дека $2,3,1\pm\sqrt{5}i$ се прости броеви во D.

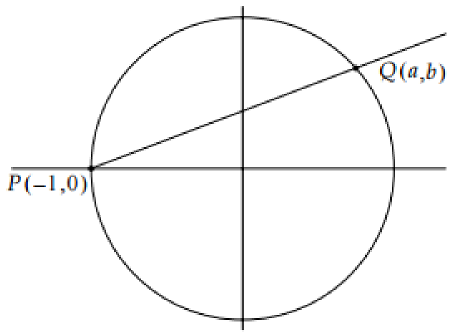
Тврдењето на Кумер претставувало брилијантен пример од математичката логика, но и голем удар за сите генерации математичари. Надежта дека ќе се пронајде доказ на оваа теорема по доказот на Кумер, била сведена на минимум. Кумер успеал да ја покаже ГТФ за сите прости експоненти (степени) помали од 100. Очајноста кај математичарите наведувала на заборав за овој голем проблем.

Но, во 1908 година германскиот математичар Паул Волфскел (Paul Wolfskehl, 1856-1906), дал надеж дека покрај сè, за оваа теорема има опстанок. Интересната приказна започнала со опседнатоста на Волфскел ([3]). Имено, тој бил заљубен во една преубава жена, чиј идентитет никогаш не бил откриен. Таа не била заинтересирана за него, па тој решил да се самоубие. Волфскел бил човек кој до најситен детал ја испланирал својата смрт. Одредил точен датум и час за самоубиство и испланирал да си пука во главата точно на полноќ. Во остатокот од деновите кои му преостанувале, работел, а последниот ден напишал тестамент и писма до своите најблиски. Планот течел според претходно утврдената шема сè до последниот ден. Поради слободно време кое му останало до полноќ, решил за крај да прочита нешто од математичката библиотека. Разгледувајќи, наишол на Кумеровиот труд во кој било детално објаснето каде биле грешките на Коши и Ламе во доказите на ГТФ. Читајќи го трудот детално, забележал нешто што можело да се карактеризира како пропуст во логиката. Всушност, Кумер изнел претпоставка која не успеала да ги оправда чекорите во својот доказ. Волфскел се запрашал дали тој успеал да најде нешто што било недостаток или, пак, Кумеровата претпоставка сепак била точна. Постепено, истражувал еден неадекватен сегмент од доказот и започнал да развива свој мини-доказ со кој или ќе го потврди и поткрепи трудот на Кумер или целиот Кумеров труд би бил под знак прашалник. До рано изутрина, Волфскел успеал да го формулира целиот доказ со кој ја поправил грешката во трудот на Кумер. Од тој момент, по истекот на времето предвидено за самоубиство, математиката му ја вратила желбата за живот.

Уште еден математичар се обидел да ја „замати“ славата на доказот на ГТФ. Тоа бил австриско-германскиот математичар и логичар Курт Гедел (Kurt Gödel, 1906 – 1978). Во својот труд околу оваа теорема, тој покажал дека ГТФ можеби е вистинита, но не мора да постои начин за нејзино докажување. Но, и покрај општиот неуспех кој владеел во текот на вековите и геделовото „предупредување“, дел од математичарите сепак останале приврзани кон проблемот.

Во текот на 1954 година, случајната средба меѓу двајца математичари, подоцна и соработници, довела до голем напредок во доказот на Големата теорема на Ферма. Тоа била средба помеѓу Горо Шимура (Shimura Gorō, роден 1930) и Јутака Танијама (Yutaka Taniyama, 1927-1958), двајца млади математичари од Универзитетот во Токио. Заедно работеле на еден проблем – во врска со елиптичните криви и модуларните форми. Тврделе дека *секоја елиптична крива има единствена придружена модуларна форма*. Ова тврдење било насловено како *хипотеза на Танијама-Шимура*. Но, ни тие сами, а ни други, не можеле да ја докажат оваа хипотеза. Во есента 1984 година, на симпозиум во Шварцвалд, се дискутирало за напредокот во проучувањето на елиптичните криви. Еден од предавачите, Герхард Фрај, немал никаква нова идеја во врска со решавање на поставената хипотеза, но тврдел нешто невообичаено: доколку некој успее да ја докаже хипотезата на Танијама-Шимура, тогаш би успеал во докажувањето и на ГТФ.

Пред да ја изнесеме идејата на Фрај, ќе направиме осврт на диофантовата равенка. Имено, преку геометриско претставување ќе ги најдеме сите цели броеви, кои се решенија на равенката $x^2 + y^2 = z^2$. Ако ја поделиме равенката $x^2 + y^2 = z^2$ (од двете страни) со z^2, ќе добиеме $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$. Решавањето на равенката $x^2 + y^2 = z^2$ во множеството цели броеви е исто што и решавање на равенката $u^2 + v^2 = 1$ во множеството рационални броеви. Геометриски тоа значи да се најдат сите точки со рационални координати, таканаречени *рационални точки*, кои лежат на единична кружница ([4]). Нека е дадена една фиксна точка, на пример $P(-1,0)$, на единична кружница. Ако $Q(a,b)$ е произволна точка, тогаш правата повлечена од точката $P(-1,0)$ до точката $Q(a,b)$, има коефициент рационален број и тој е $b/(a+1)$ (Слика2). Обратно, секоја права низ $(-1,0)$ ја сече кружницата во друга точка (a,b). За да ги најдеме сите рационални точки на кружницата, треба да ги најдеме пресеците на сите прави PQ ($P(-1,0)$) со кружницата, при што коефициентот на правецот на секоја од правите да биде рационален број t (Слика 2).



Слика 2. Единична кружница со произволна точка P.

На тој начин може да се реши $u^2+v^2=1$ и $v=t(u+1)$, истовремено за u и v и добиваме $u=\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}$, $v=\frac{2t}{(1+t^2)}$. Ако ставиме $t=\frac{m}{n}$, ќе најдеме цели решенија за равенката $x^2+y^2=z^2$ и тоа $x=n^2-m^2$, $y=2nm$, $z=n^2+m^2$ ([5]).

Кога Фрај започнал со полемика, најпрво го поставил концептот на равенката на Ферма:

$$x^n+y^n=z^n, n=3,4,...$$

ГТФ тврди дека не постојат позитивни целобројни решенија, но Фрај се обидувал да воочи што би се случило доколку оваа теорема не би била вистинита, т.е. кога би постоело најмалку едно решение. Тргнувајќи од идејата за хипотетички решенија, ги вовел следните ознаки:

$$A^N+B^N=C^N$$

Со оваа трансформација, Фрај направил ригорозна математичка постапка, со која го променил изгледот на равенката, но не и интегритетот. Во неколку чекори, била изведена следната релација:

$$y^2=x^3+(A^N-B^N)x^2-A^N B^N \qquad (2)$$

Членовите на симпозиумот не биле многу воодушевени од ваквиот облик на равенката, иако како последица на хипотетичките решенија доколку постои решение за равенката на Ферма и ако била ГТФ е невистината, тогаш преуредената равенка исто така би постоела.

Со равенката (2), Фрај претставил равенка на елиптична крива, во нестандарден облик (многу посложен). Во општ облик, елиптична крива изгледа вака:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

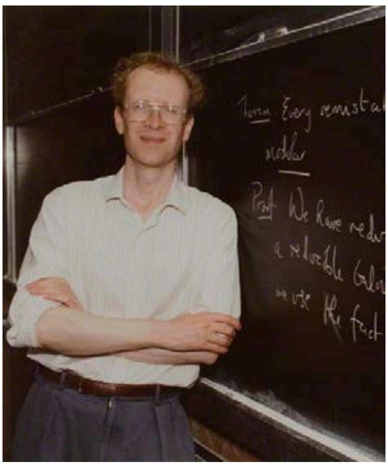
Со воведување смена:

$$a = A^N - B^N, b = 0, c = -A^N B^N$$

полесно би се препознала елиптичната природа на равенката на Фрај. Презапишувајќи ја равенката на Ферма во елиптичен облик, Фрај ја поврзал ГТФ со хипотезата на Танијама-Шимура.

4. ДОКАЗ НА ГТФ

Кога имал само 10 години, Ендру Вајлс (Andrew Wiles,1953) бил фасциниран од математиката. *„Обожавав да решавам математички проблеми. Но, најдобриот проблем кој сум го сретнал, го открив во својата локална библиотека.“*



Слика 3. Ендру Вајлс

Станувало збор за книгата *Последниот проблем* од Ерик Бел, книга која ја скицирала математиката од 17 век. Првиот впечаток на Вајлс за ГТФ бил: *„Изгледаше толку едноставна, а сепак сите големи математичари не успееле да ја докажат. Тука беше поставен проблем што и јас, десетгодишен ученик можев да го разберам. Од тој момент, решив да не ја напуштам, сѐ додека не ја докажам.“*

И покрај многуте обиди за докажување, Вајлс успеал да испише еден голем куп хартија, но залудно. А тогаш:

„Беше тоа една вечер, крајот на летото 1986 година, кога бев на гости кај пријател. Пиевме чај. Сосема случајно, низ разговор, тој ми кажа дека Кен Рибет ја докажал врската помеѓу хипотезата на Танијама-Шимура и ГТФ (т.е. дека кривата на Фрај не може да се параметризира со модуларни функции). *Бев многу возбуден. Од тој момент, знаев едно, доколку сакам да ја докажам*

ГТФ, морам прво да ја докажам хипотезата. Знаев дека морам да работам, дека морам да ја докажам хипотезата на Танијама-Шимура.“

По докторирањето кај професорот Џон Коутс на Кембриџ, Вајлс станал професор на Универзитетот Принстон. Благодарение на насочувањето од професорот Коутс, Вајлс знаел за елиптичните криви повеќе од кој било, но сепак постоел ризик при обидот за докажување. Многу математичари, вклучувајќи го и Џон Коутс, сметале дека обидите за докажување на оваа теорема, биле само една бескорисна авантура. По седум години напорна работа, на 23 јуни 1993 година, Ендру Вајлс го објавил својот доказ на ГТФ. За многу професионални математичари, доказот на хипотезата на Танијама-Шимура бил позначаен, бидејќи се поврзувал со уште многу други теореми. Конечно, по рецензијата на Ричард Тејлор и Џон Коутс и исправката на пронајдената грешка во првичниот доказ, неговиот труд бил објавен во списанието „*Annals of Mathematics*“ во мајското издание од 1995 година.

4. ПРИМЕНА НА ГОЛЕМАТА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

Големата теорема на Ферма наоѓа примена и денес. Нејзиното суштинско значење ќе го илустрираме преку следниот пример. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{1803664}{1+1803664x}+\frac{2298565}{1+2298565x}-\frac{2301505}{1+2301505x}$.

Докажи дека $f^{(16)}(0)\neq 0$. Диференцирајќи ја функцијата, добиваме

$$f^{(16)}(x)=16!\cdot\left[\frac{1803664^{17}}{(1+1803664x)^{17}}+\frac{2298565^{17}}{(1+2298565x)^{17}}-\frac{2301505^{17}}{(1+2301505x)^{17}}\right].$$

За $x=0$ добиваме

$$f^{(16)}(0)=16!\cdot\left[1803664^{17}+2298565^{17}-2301505^{17}\right].$$

Имајќи ја предвид Големата теорема на Ферма, изразот не е еднаков на 0 ([5]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] I.G.Bashmakova, *Diophantus and Diophantine Equations,* Math. Assoc. of America, 1997.

[2] N. Van Quang, *Euler's proof of Fermat's Last Theorem for n = 3 is incorrect*, Hue – Vietnam, 05 – 2016.

[3] D. Goranović, *Velika Fermaova teorema*, Matematički kolokvijum (Banja Luka) XIII(2) (2007), 5 – 23.

[4] I. Kleiner, *Fermat's Last Theorem Becomes a Theorem*, Basel, 2000.

[5] К.Тренчевски, Д.Ципев, *Историја на математиката,* Скопје, 1995.

[6] Н. Целакоски, *За последната теорема на Ферма*, Предавање одржано на Семинарот на ИМ, ПМФ на 21.III 2006.

[7] A. Weil, *Number theory,* Boston, 1984.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: stefan_mircevski@outlook.com

Примен: 17.04.2017
Поправен: 10.06.2017
Одобрен: 14.06.2017