Самоил Малчески, Скопје

НЕКОЛКУ НАЧИНИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА ЕДНО НЕРАВЕНСТВО

Најчесто постојат повеќе начини за решавање на една иста задача. Ова посебно се однесува на задачите кои се задаваат на натпреварите по математика. Токму затоа, во следните разгледување ќе презентираме повеќе начини за решавање на една задача од ваков вид.

Задача. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}\geq\frac{3a+2b-c}{4}. \qquad (1)$$

Решение. ***Прв начин.*** Ако на двете срани на неравенството (1) го додадеме изразот $\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}\geq\frac{3a+2b-c}{4}+\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}$$
$$(\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4})+(\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4})\geq a+b.$$
Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина бидејќи
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4}}=a \text{ и } \frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4}}=b,$$
што значи дека е точно неравенството (1).

Втор начин. Од Енгеловиот принцип на минимум, кој гласи:

Ако x и y се позитивни броеви u и v се реални броеви, тогаш
$$\frac{u^2}{x}+\frac{v^2}{y}\geq\frac{(u+v)^2}{x+y}$$
(види [1] и [2]), при $u=a, v=b, x=a+b$ и $y=b+c$ добиваме
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}\geq\frac{(a+b)^2}{a+2b+c}=a+b-\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}. \qquad (2)$$
Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува
$$\frac{a+2b+c}{2}=\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\geq\sqrt{(a+b)(b+c)},$$
па затоа $(a+2b+c)^2\geq 4(a+b)(b+c)$, т.е.

$$-\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \geq -\frac{a+2b+c}{4}.$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (2) следува

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c} \geq= a+b-\frac{a+2b+c}{4}=\frac{3a+2b-c}{4},$$

т.е. точно е неравенството (1).

Трет начин. За позитивните реални броеви a и b последователно се точни еквивалентните неравенства:

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$
$$4a^2 \geq 3a^2+3ab-b^2-ab$$
$$4a^2 \geq 3a(a+b)-b(a+b)$$
$$4a^2 \geq (a+b)(3a-b)$$
$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$$

и аналогно $\frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3b-c}{4}$. Конечно, ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1).

Четврт начин. Неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$4a^2(b+c)+4b^2(a+b) \geq (a+b)(b+c)(3a+2b-c)$$
$$a^2b-ab^2+a^2c+ac^2-b^2c+bc^2+2b^3-4abc \geq 0$$
$$b(a-c)^2+(a+c-2b)(ac-b^2) \geq 0. \tag{3}$$

Ако $(a+c-2b)(ac-b^2) \geq 0$, тогаш точно е неравенството (3), што значи дека е точно и неравенството (1). Ќе докажеме дека неравенството (3) е точно и кога $(a+c-2b)(ac-b^2) < 0$. Можни се два случаја:

Прв случај. Ако $a+c-2b > 0$ и $ac-b^2 < 0$, тогаш $b < \sqrt{ac}$ и $\frac{a+c}{2} > b$, т.е. $G=\sqrt{ac} < b < \frac{a+c}{2}=A$. Бидејќи $a+c=2A$ и $ac=G^2$, неравенството (3) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2A^2b-Ab^2+AG^2-3bG^2+b^3 \geq 0$$
$$Ab(A-b)+b(A^2-G^2)+G^2(A-b)+b(b^2-G^2) \geq 0.$$

Јасно, од $G < b < A$ следува точноста на последното неравенство, што значи дека е точно неравенството (3), т.е. точно е неравенството (1).

Втор случај. Ако $a+c-2b<0$ и $ac-b^2>0$, тогаш $\frac{a+c}{2}<b<\sqrt{ac}$, што противречи на неравенствгото меѓу аритметичката и геометриската средина, па затоа овој случај не е е можен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сава Гроздев, Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус 41/2, 2015
2. Ристо Малчески, Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, 2016

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ