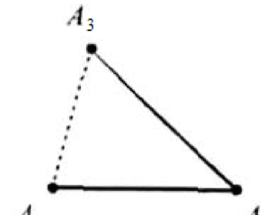
ЈБМО 2003

1. Нека n е природен број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

   Решение. Имаме
$$A=\underbrace{44...44}_{2n}=4\cdot\underbrace{11...11}_{2n}=\tfrac{4}{9}\cdot\underbrace{99...99}_{2n}=\tfrac{4}{9}(10^{2n}-1).$$
   Аналогно, $B=\frac{8}{9}(10^n-1)$. Според тоа,
$$\begin{aligned}A+2B+4&=\tfrac{4}{9}(10^{2n}-1)+\tfrac{16}{9}(10^n-1)+4\\&=\tfrac{4\cdot10^{2n}-4+16\cdot10^n-16+36}{9}\\&=\tfrac{(2\cdot10^n)^2+2\cdot2\cdot10^n\cdot4+4^2}{9}\\&=(\tfrac{2\cdot10^n+4}{3})^2.\end{aligned}$$
   Збирот на цифрите на бројот $2\cdot10^n+4$ е 6, па затоа тој се дели со 3, што значи дека $\frac{2\cdot10^n+4}{3}$ е ориороден број, со што тврдењето на задачата е докажано.

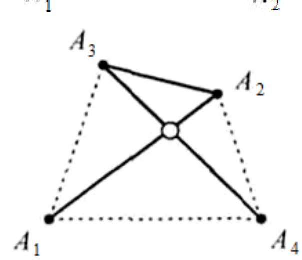
2. Во рамнината се дадени n точки меѓу кои нема три колинеарни и за кои важи: При било кое означување на овие точки со $A_1,A_2,...,A_n$ искршената линија $A_1A_2...A_n$ не се пресекува самата себе. Определи ги сите природни броеви n за кои n такви точки постојат.

   Решение. За $n=3$ имаме три неколинеарни точки. Било како да ги означиме A_1,A_2,A_3, искршената линија $A_1A_2A_3$ не може самата себе да се пресекува (цртеж десно).

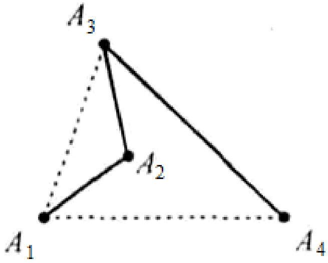


   За $n=4$ карактерисични се ледниве два случаја.

   а) Точките формираа конвексен четириаголник. Бидејќи дијагоналите на ваков четириаголник се сечат, заклучуваме дека во овој случај имаме означување при кое искршената линија самата себе ќе се пресекува (цр-



теж десно).



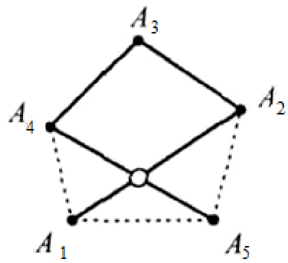
б) Точките формираат неконвексен четириаголник. Тогаш една од точките е во внатрешноста на триаголникот чии темиња се другите три точки (цртеж лево). Јасно, било како да ги означиме точките, добиваме дека искршената линија $A_1A_2A_3A_4$ не се самопресекува.

Според тоа, за $n=4$ постојат точки (случајот б)) кои го задоволуваат условот на задачата.

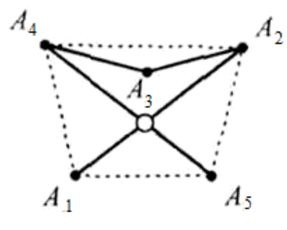
Ќе докажеме дека за $n=5$, за секои n точки во рамнината, такви што никои три не се колинеарни, постои означување при кое искршената линија $A_1A_2...A_n$ се самопресекува.

Според а) доволно е да докажеме дека меѓу секои $n(n\geq 5)$ точки во рамнината меѓу кои нема три колинеарни, постојат четити кои се темиња на конвексен четириаголник.

Да земеме било кои пет од дадените n точки и да ја разгледаме нивната конвексна обвивка. Тоа е минималниот многуаголник кој ги содржи тие точки. Можни се следниве случаи:

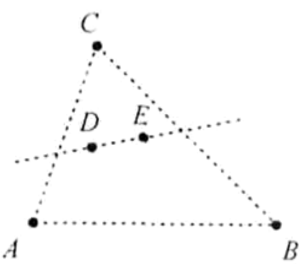


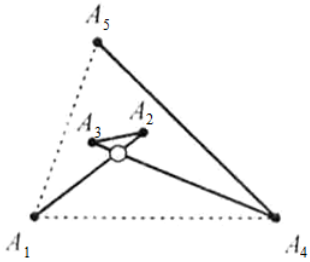
1) *Конвексната обвивка е петаголник*. Тогаш било кои четири точки формираат конвексен четириаголник, па можно е означување како на цртежот десно.



2) *Конвексната обвивка е четириаголник*. Слично како во случајот 1) имаме означувањепри кое искршената линија се самопресекува (цртеж десно).

3) *Конвексната обвивка е триаголник*. Нека тоа е триаголникот ABC и нека точките D и E се во неговата внатрешност.





Бидејќи според условот на задачата правата DE не содржи ниту едно теме на $\triangle ABC$, таа сече две негови страни во внатрешни точки. Нека тоа се страните AC и BC (цртеж горе лево). Тогаш четириаголникот $ABDE$ е конвексен и при означување како на десниот горен цртеж искршената линија $A_1A_2A_3A_4A_5$ се самопресекува.

Според тоа, најголемиот природен број n кој ги задоволува условите на задачата е 4.

3. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и нека BC, CA, AB се лаците на кружницата кои не содржат темиња на $\triangle ABC$, а точките D, E, F се соодветно нивните средини. Нека G и H се пресечните точки на тетивата DE соодветно со страните CA и CB, а I и J се пресечните точки на тетивата DF соодветно со страните BC и BA. Нека M и N се средините на отсечките GH и IJ, соодветно.

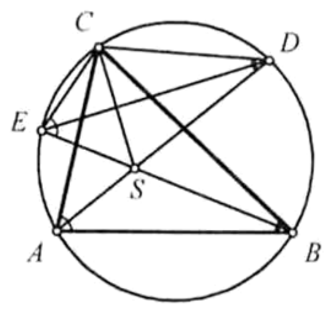
а) Изрази ги аглите на $\triangle DMN$ преку аглите на $\triangle ABC$.

б) Ако O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle DMN$ и P е пресечната тоќка на отсечките AD и EF, докажи дека точките P, N, O и M лежат на иста кружница (се концикллични).

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и нека D и E се соодветно средините на лаците BC и AC кои не ги содржат темињата A и B. Ако S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, тогаш правата DE е симетрала на отсечката CS.

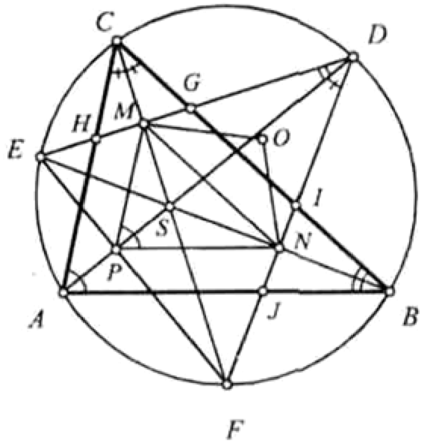
Доказ. Бидејќи D е средина на лакот BC, AD е симетралата на $\measuredangle BAC = \alpha$. Слично, BE е симетралата на $\measuredangle ABC = \beta$. Затоа $AD \cap BE = S$ (цртеж десно).



Да ги разгледаме триаголниците CDE и SDE. Имаме $\measuredangle CDE = \measuredangle SDE = \frac{\alpha}{2}$ (периферни агли над еднакви лаци CE и AE) и слично $\measuredangle CED = \measuredangle SED = \frac{\beta}{2}$. Но, овие триаголници имаат и заедничка страна DE, па затоа $\triangle CDE \cong \triangle SDE$. Последното значи $\overline{CD} = \overline{SD}$ и $\overline{CE} = \overline{SE}$, т.е. четириаголникот $SDCE$ е делтоид, од што следува тврдењето. ■

На потполно идентичен начин се докажува дека DF и FA се симетрали на отсечките BS и AS, соодветно.

а) Според лемата M е средина на отсечката CS. Бидејќи CS е симетрала на $\measuredangle ACB$ и $DE \perp CS$, добиваме дека $\triangle HGC$ е рамнокрак со $\overline{CH} = \overline{CG}$. На сличен начин се докажува дека N е средина на отсечката BS и дека $\overline{BI} = \overline{BJ}$. Од тоа следува дека MN е средна линија на $\triangle SBC$, па затоа $MN \| CB$, односно $MN \| GI$ (цртеж десно). Затоа аглите на $\triangle DMN$ се еднакви на соодветните агли на $\triangle DGI$. Така добиваме



$$\measuredangle MDN = \measuredangle MDA + \measuredangle ADN = \frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\measuredangle DGI = \measuredangle CGH = \frac{180^\circ - \gamma}{2},$$

$$\measuredangle DIG = \measuredangle BIJ = \frac{180^\circ - \beta}{2}.$$

б) Како во решението под а) заклучуваме дека $PN \| AB$ и $PM \| AC$. Затоа

$$\measuredangle MPN = \measuredangle CB = \alpha. \qquad (1)$$

Бидејќи O е центар на опишаната кружница околу $\triangle DMN$, од теоремата за централен и периферискиагол и тврдењето под а) следува

$$\measuredangle MON = 2\measuredangle MDN = 2\frac{\beta+\gamma}{2} = \beta + \gamma. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$\measuredangle MPN + \measuredangle MON = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Според тоа, четириаголникот $PNOM$ е тетивен, што значи дека точките P, N, O и M лежат на иста кружница (се конциклични).

4. Нека $x, y, z > -1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

Решение. Од неравенството $\frac{1+y^2}{2} \geq y$ следува

$$\frac{1+y^2}{2}+1+z^2 \geq 1+y+z^2 .$$

Бидејќи $y>-1$ двете страни на последното неравенство се позитивни, па затоа важи

$$\frac{1}{1+y+z^2} \geq \frac{1}{\frac{1+y^2}{2}+1+z^2} .$$

Последното неравенство го множиме со $1+x^2$ и после средувањето го добиваме неравенството

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)} .$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)} \text{ и } \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} .$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} .$$

Очигледно, бараното неравенство ќе го докажеме ако докажеме дека

$$\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} \geq 1.$$

Воведуваме замена $1+x^2=a, 1+y^2=b, 1+z^2=c$. Јасно, $a,b,c>1$ и сега треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1,$$

за кое претходно видовме дека важи. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.