Конфигурација n правих у равни

***Александар Илић*, Ниш**

Увод

Праве у Еуклидској равни су у *ойшйем йоложају* или *генералној йозицији*, ако међу њима нема паралелних и никоје три се не секу у једној тачки. Две пресечне тачке су *суседне* ако и само ако се налазе на истој правој, тако да између њих нема других пресечних тачака. Две области називамо суседним уколико је њихова заједничка граница дуж, полуправа или права. *Прамен йравих* је скуп правих које су или све паралелне или пролазе кроз исту заједничку тачку. У овом чланку ћемо анализирати нека својства оваквих конфигурација.

Број области

Теорема 1. *Нека је дато n йравих у равни у ойшйем йоложају. Тада оне деле раван на*

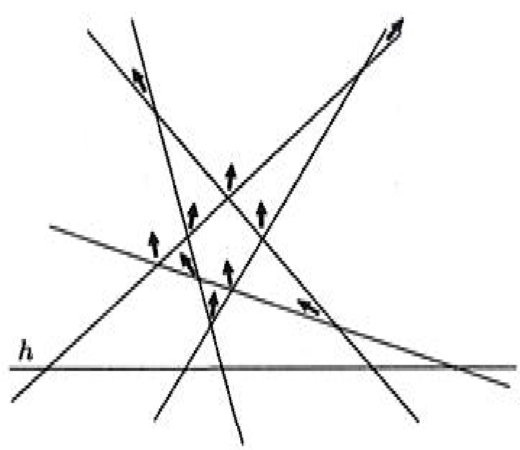
$$p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

области, од којих су $2n$ бесконачне.

Доказ. Свака права је подељена на n делова, од којих су два бесконачна (две полуправе и $n-2$ дужи). Како сваку бесконачну област чине две полуправе, укупно имамо $2n$ бесконачних области. Број тачака је $\binom{n}{2}$.

Тврђење се лако показује индукцијом по n. За $n = 1$ имамо две области – полуравни, обе бесконачне. Претпоставимо да је теорема тачна за n правих и докажимо је за $n+1$. Када конструишемо нову праву, она мора да сече сваку од преосталих n правих, па добијамо нових $n+1$ области. Дакле, укупан број области је

$$p_{n+1} = (n+1) + p_n = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$



Слика 1 – Конструкција бијекције

Покажимо ово тврђење налажењем бијекције између делова равни и неког скупа, којег је лако пребројати. У том циљу уводимо правоугли координатни систем, тако да x оса није паралелна ни са једном од n правих. Најдубља тачка неке области је тачка са најмањом y координатом, уколико постоји. Свака тачка пресека је најдубља за тачно једну област. Зато има $\binom{n}{2}$ области са најдубљим тачкама. Области које немају ово својство нису ограничене одоздо. Сада конструишемо једну хоризонталну праву h. Ове неограничене области је деле на $n+1$ делова. Области се могу једнозначно придружити сваком делу праве. Најзад добијамо:

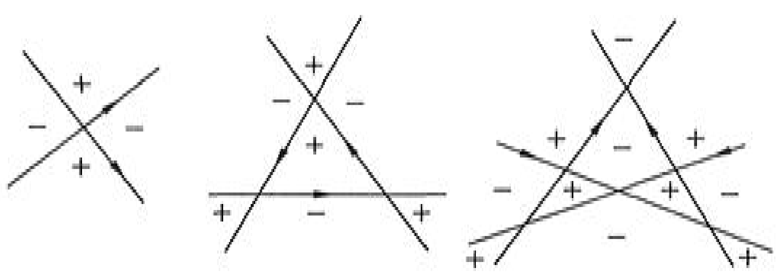
$$p_n = n + 1 + \binom{n}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}. \qquad \square$$

Теорема 2. *Дато је n правих у равни у општем положају, где свака права има свој смер. Област је добро оријентисана, ако се може обићи по рубу области у складу са смеровима правих. Тада за број добро оријентисаних области важи неједнакост:*

$$w \leqslant \left\lfloor \frac{n^2+n}{3} \right\rfloor.$$

Доказ. Неограничене области садрже бар једну тачку пресека, док су ограничене области конвексни многоуглови који садрже најмање 3 темена. Решење се базира на следећој једноставној чињеници: свака дуж или полуправа је ивица највише једне добро оријентисане области. Како је број дужи једнак $n(n-2)$, а број полуправих једнак $2n$, то је тражени број мањи или једнак од:

$$w \leqslant \frac{n^2-2n}{3} + \frac{2n}{2} = \frac{n(n+1)}{3}.$$



Слика 2 – Добро оријентисане области

Једнакост добијамо за случајеве $n = 2, 3, 4$ приказаних на слици 2. $\square$

Посматрајмо сада случај када праве нису у општем положају. Једине ствари које редуцирају број области одређених са n правих у равни су постојање паралелних правих или тачака кроз које пролази више од две праве. Уколико кроз тачку M пролази λ правих, кажемо да је M *мултипліцитета* λ. Ако замислимо да тих λ правих померимо „мало“, тако да добијемо праве у генералној позицији, губимо $\binom{\lambda-1}{2}$ коначних области. Уколико посматрамо μ паралелних правих једне фамилије, можемо да их померимо „мало“ тако да се све секу у далекој тачки M. Тада се у тачки M губи $\binom{\mu-1}{2}$ коначних области и $\mu - 1$ области иза тачке M. Значи, укупан губитак је $\binom{\mu}{2}$ области уколико имамо μ паралелних правих.

Теорема 3. **(Roberts)** *Нека су $M_1, M_2, \ldots, M_m$ тачке кроз које пролази више од две праве – кроз M_i пролази $\lambda_i \geqslant 3$ правих. Нека је p број паралелних фамилија са по $\mu_i \geqslant 2$ правих у i-тој фамилији. Тада је број области једнак:*

$$R = 1 + n + \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{m} \binom{\lambda_i - 1}{2} - \sum_{i=1}^{p} \binom{\mu_i}{2}.$$

Доказ. Користићемо методу *„sweep line"*. Посматрамо праву p која није паралелна ни са једном од n правих и налази се довољно далеко, тако да су све тачке пресека са исте стране праве p. На почетку је права p подељена на $n+1$ делова (две полуправе и $n-1$ дужи) са n пресечних тачака. Сваки део праве p одређује јединствену област, па права p идентификује $n+1$ области.

Сада транслаторно померамо праву p кроз конфигурацију n правих, одржавајући је паралелном. Нове области се додају у свим тачкама пресека - једна нова област за просту тачку пресека, две области за тачку мултиплицитета три, $\ldots$, $\lambda - 1$ нових области за тачку кроз коју пролази λ правих. Ако има S простих тачака пресека, тада важи једнакост:

$$R = n + 1 + S + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - 1).$$

Остаје да израчунамо S из очигледне чињенице да се сваке две праве или секу или су паралелне. Кроз сваку просту тачку пролази један пар правих, а кроз тачку M_i мултиплицитета λ_i пролази $\binom{\lambda_i}{2}$ парова правих, што укупно даје:

$$k_1 = S + \sum_{i=1}^{m} \binom{\lambda_i}{2}$$

парова правих које се секу у конфигурацији.

Ако је у i-тој фамилији $\mu_i \geqslant 2$ паралелних правих, тада постоји $\binom{\mu_i}{2}$ парова у фамилији које се не секу. Укупно имамо:

$$k_2 = \sum_{i=1}^{p} \binom{\mu_i}{2}$$

парова правих које се не секу.

Из једнакости $\binom{n}{2} = k_1 + k_2$, следи: $S = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{m} \binom{\lambda_i}{2} - \sum_{i=1}^{p} \binom{\mu_i}{2}$. Када сменимо S у формулу за број области добијамо:

$$R = 1 + n + \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{m} \left[\binom{\lambda_i}{2} - \lambda_i + 1 \right] - \sum_{i=1}^{p} \binom{\mu_i}{2}. \qquad \square$$

Теорема 3 се може доказати и применом Ојлерове теореме за планарне графове.

Теорема 4. (Euler) *Нека је V број чворова повезаног планарног графа, E број ивица графа и F број области на које је раван издељена. Тада важи формула:* $V + F = E + 2$.

Број троуглова

Међу областима које смо добили са n правих у општем положају, посебно су интересантни троуглови. Следећа теорема се појављивала као задатак у руском часопису „Квант“.

Теорема 5. *Нека је дато $n > 2$ правих у равни у генералној позицији. Тада међу коначним областима постоје бар $n - 2$, а највише $\lfloor \frac{n(n-2)}{3} \rfloor$ троуглова.*

Доказ. Нека је AB једна од дужи добијених у пресеку правих. Она је граница за две области (тачно једна од њих може бити бесконачна). Како нема паралелних правих, у једној од тих области је $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 180°$, а у другој $\sphericalangle A + \sphericalangle B > 180°$. Страну дужи AB која лежи у првој области бојимо црвено, а ону која је у другој области бело. Тако је свака дуж са једне стране црвена, а са друге бела (за навијаче „Црвене Звезде“). Дакле, број црвених страна једнак је укупном броју дужи. С друге стране, странице сваког троугла су обојене (изнутра) црвено.

Лема 1. *У сваком k-тоуглу ($k \geqslant 4$) највише две странице су црвене.*

Доказ. Показаћемо да ако коначна област има бар две црвене странице, онда оне морају бити суседне. Нека су у k-тоуглу $A_1A_2 \dots A_k$ странице A_1A_2 и A_iA_{i+1}, $3 \leqslant i \leqslant k-1$, црвене. Тада је $A_1 + A_2 < 180°$ и $A_i + A_{i+1} < 180°$, па је сума свих углова

$$
\begin{aligned}
&(\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2) + \sphericalangle A_3 + \dots + (\sphericalangle A_i + \sphericalangle A_{i+1}) + \cdots + \sphericalangle A_{n-1} + \sphericalangle A_n < \\
&\quad < 180° + 180° + \cdots + 180° + \cdots + 180° + 180° = (n-2) \cdot 180°.
\end{aligned}
$$

Како је збир углова у многоуглу једнак $(n-2) \cdot 180°$, ово је очигледна контрадикција. □

Нека је d број дужи, f број свих коначних области и t број троуглова. Тада важе формуле:

$$d = n^2 - 2n = n(n-2), \quad f = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Тада је (због напомене о троугловима и леме) $d \leqslant 2f + t$, односно:

$$n(n-2) \leqslant (n-1)(n-2) + t, \quad \text{тј.} \quad t \geqslant (n-2)(n-(n-1)) = n-2.$$

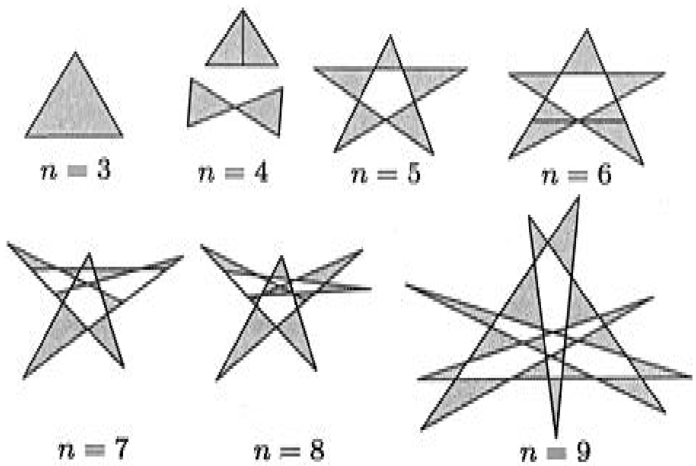
За свако n постоји конфигурација n правих у општем положају које одређују тачно $n-2$ троугла. За прве две праве узмимо координатне осе. Затим додајемо праве које секу позитивне делове x и y осе, тако да се све тачке пресека налазе са исте стране. Није тешко проверити да сваком новом правом добијамо тачно један нови троугао.

Показаћемо сада горњу границу. Како свака дуж припада највише једном троуглу, то је број троуглова мањи или једнак од:

$$t \leqslant \frac{d}{3} = \frac{n(n-2)}{3}. \qquad \square$$

Проблем налажења максималног броја троуглова у равни са n правих је познат као *Kobon triangle problem*. Недавно је доказано исто горње ограничење, али када праве не морају бити у општем положају. Проблем је отворен, а досадашњи резултати су приказани у табели:

n	**3**	**4**	**5**	6	**7**	8	**9**	10	11	12	**13**	14	**15**	16
Најбоље решење	1	2	5	7	11	15	21	25	32	38	47	?	65	?
Горња граница	1	2	5	8	11	16	21	26	33	40	47	56	65	74

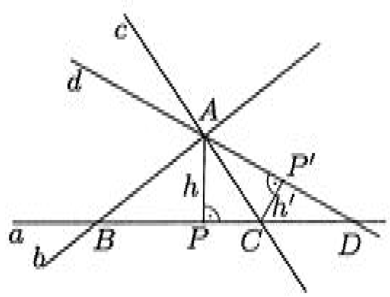


Слика 3 – Најбоља решења за $n = 3$ до $n = 9$

Силвестеров проблем

На крају се позабавимо следећим питањем: Колико пресечних тачака могу да формирају n правих у равни?

Теорема 6. **(Sylvester, Gallai)** *Дато је $n \geqslant 3$ правих у равни, које нису све паралелне. Кроз пресек сваке две праве пролази још једна права овог скупа. Доказати да све праве пролазе кроз једну тачку.*



Слика 4 – Силвестеров проблем

Доказ. Ово је класичан пример *екстремалног принципа*. Претпоставимо супротно, да постоје бар две тачке пресека. Посматрамо све парове правих и пресечних тачака, и одаберимо најмање растојање међу свим тачкама и правама. Нека је најмање растојање h – тачке A

од праве a (слика 4). Бар три праве пролазе кроз тачку A; нека су то b, c, d и секу праву a у тачкама B, C и D, редом. Спустимо нормалу AP из A на праву a, тако да $P \in a$. По Дирихлеовом принципу, бар две од тачака B, C, D леже са исте стране тачке P. Без губљења општости нека су то C и D, тако да је $CP < DP$. Сада је растојање тачке C од праве AD мање од растојања тачке A од a. Контрадикција! □

ПОСЛЕДИЦА. *Дат је коначан скуп тачака у равни, тако да не припрадају једној правој. Тада постоји права која садржи тачно две тачке из скупа.*

ТЕОРЕМА 7. *Нека n правих у равни одређују p тачака пресека. Тада је $p = 0$ или $p = 1$ или*

$$n - 1 \leqslant p \leqslant \binom{n}{2}.$$

Доказ. Ако су све праве међусобно паралелне, тада нема пресечних тачака. Ако се све праве секу у једној тачки, тада је $p = 1$. Показаћемо да уколико међу n правих нису све праве паралелне или се не секу у једној тачки, тада је број тачака бар $n - 1$.

Тврђење доказујемо индукцијом по n. Лако проверимо све распореде за $n = 3$ и $n = 4$. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n \geqslant 4$ и докажимо да важи за $n + 1$ праву. Међу пресечним тачкама, постоји тачка P која је суседна са тачно две праве, због горње последице. Избацивањем праве l која пролази кроз тачку P, долазимо до случаја са n правих. Ако су све остале праве паралелне међусобно, тада права l са њима има n заједничких тачака. Ако се све преостале праве секу у једној тачки, тада враћањем праве l добијамо још n или $n - 1$ пресечних тачака, у зависности да ли је права l паралелна са неком од n правих. Треба још разматрати случај када осталих n правих нису ни паралелне ни конкурентне и одређују бар две тачке. По индукцијској хипотези оне одређују $n - 1$ пресечних тачака. Како овом скупу не припада тачка P, добијамо бар n тачака у пресеку. Овим је доказ окончан. □

Хипотеза да за свако p између $n - 1$ и $\binom{n}{2}$, постоји неки распоред n правих, тако да оне формирају p пресечних тачака, је тачна за $n < 10$. Међутим, немогуће је формирати $n + 1$ пресечну тачку са n правих за $n \geqslant 10$. Карактеризација броја пресечних тачака које формирају n правих је отворен проблем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ARTHUR ENGEL, *Problem Solving Strategies*, Springer Verlag, 1998.

[2] MARTIN GARDNER, *Wheels, life, and other mathematical amusements*, W. H. Freeman (1983) 170–171.

[3] BRANKO GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*, 2nd edition, Springer Verlag, 2003.

[4] FEJES TÓTH, *A combinatorial problem concerning oriented lines in plane*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 4 (1975), 378–389.

[5] JOHN WATZEL, *On the division of the plane by lines*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 8 (1978), 647–656.

[6] `http://mathworld.wolfram.com`

[7] `http://www.ics.uci.edu/ eppstein/junkyard`

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2006/07 година