Валентина Гоговска, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ИНВЕРЗИЈАТА ВО ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ

Во оваа статија ќе се осврнеме на примената на инверзијата во решавање на неколку олимписки задачи. Притоа ќе сметаме дека читателот е запознаен со инверзијата и нејзините својства, па затоа истите нема детално да ги презентираме, т.е. нема да ги докажуваме. Овде ќе напомниме дека читателите кои ги немаат потребните знаења потребно е да консултираат соодветна литература. За таа цел им препорачуваме да ги консултираат книгите од наведената литература.

Нека $m=r^2$ е позитивен реален број, а O е фиксна точка во рамнината Π. На секоја точка $A\neq O$ и ја придружуваме точката A' што лежи на полуправата OA и за која е исполнет условот

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m. \tag{1}$$

Точката A' е еднозначно определена, па затоа добиваме пресликување од $\Pi\setminus\{O\}$ во Π. Од условот (1) следува дека ова пресликување е инјекција, но не е сурјекција. Меѓутоа, ако пресликувањето го разгледуваме од $\Pi\setminus\{O\}$ во $\Pi\setminus\{O\}$, тоа е биекција и истото го нарекуваме *инвезија со центар* O *и коефициент* m, во ознака $J(O,m)$ или само J. За инверзијата точни се следниве тврдења.

Теорема 1. Ако $J(A)=A'$, тогаш $J(A')=A$, односно $J^2=\varepsilon$.

Теорема 2. Точката A е од кружницата $k_0(0,\sqrt{m})$ ако и само ако $J(A)=A$.

Значи, точките од кружницата $k_0(0,\sqrt{m})$ се единствените неподвжни точки за инверзијата J. Затоа оваа кружница се нарекува *кружница на инверзијата* J. Значи, инверзијата е определена или со центар и коефициент на инверзија или со кружницата на инверзија.

Теорема 3. Секоја внатрешна точка на кружницата $k_0(0,\sqrt{m})$ при инверзијата се пресликува во надворешна точка за $k_0(0,\sqrt{m})$ и обратно.

Теорема 4. Ако $J(A)=A'$ и $J(B)=B'$, тогаш

$$\measuredangle OA'B'=\measuredangle OBA \text{ и } \measuredangle OB'A'=\measuredangle OAB. \tag{2}$$

Теорема 5. Секоја права што минува низ центарот O на инверзија J се пресликува во самата себе, а секоја права што не минува низ O се пресликува во кружница што минува низ O.

Теорема 6. Ако кружницата k минува низ центарот O на инверзијата J, тогаш $J(k)$ е права што не минува низ O.

Теорема 7. Кружница што не минува низ центарот O на инверзијата J се пресликува во кружница што не минува низ центарот O.

Како што рековме при инверзија J зададена со кружницата $k_0(0,\sqrt{m})$ неподвижни се само точките од кружницата $k_0(0,\sqrt{m})$, па затоа за кружницата $k_0(0,\sqrt{m})$ ќе велиме дека е *точкасто неподвижна* за J. Одговорот на прашањето дали постојат и други кружници кои се неподвижни за J го дава следнава теорема.

Теорема 8. Кружницата k различна од $k_0(0,\sqrt{m})$ е неподвижна за инверзијата J ако и само ако k ортогонално ја сече $k_0(0,\sqrt{m})$.

Теорема 9. Ако две прави, односно права и кружница, односно две кружници имаат една заедничка точка, тогаш и нивните слики при инверзијата J имаат една заедничка точка.

Теорема 10. Ако меѓу две прави, меѓу права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.

Теорема 11. а) За секоја права p и кружница k постои инверзија J таква што $J(p)=k$.

б) Ако се дадени кружници k' и k'', тогаш постои инверзија J која ги пресликува во:

1) две прави ако k' и k'' имаат заедничка точка,

2) две концентрични кружници ако k' и k'' се дисјунктни.

1. Даден е $\triangle ABC$ со полупериметар p. На правата AB се земени точки E и F такви што $\overline{CE}=\overline{CF}=p$. Докажи дека припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB и опишаната кружница околу $\triangle EFC$ се допираат.

   Решение. Нека P и Q се допирните точки на припишаната кружница со правите CA и CB, соодветно. Познато е дека $\overline{CP}=\overline{CQ}=p$, т.е. точките E,P,Q,F лежат на кружницата со центар C и радиус p. Нека J е инверзијата определена со оваа кружница. Со k да ја означиме опишаната кружница околу $\triangle EFC$, а со k_1 да ја означиме припишаната кружница. Бидејќи $J(P)=P,\ J(Q)=Q$ и k_1 се допира до правите CP и CQ кои при оваа инверзија се неподвижни следува дека $J(k_1)=k_1$. Од друга страна, $J(E)=E$ и $J(F)=F$, т.е. $J(k)$ е правата AB. Бидејќи k_1 се допира до AB, заклучуваме дека k и k_1 се допираат.

2. Различните кружници k_1,k_2,k_3,k_4 се такви што k_1 и k_3 надворешно се допираат во точката P, и k_2 и k_4 исто така надворешно се допираат во точката P. Нека k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_4, k_4 и k_1 се сечат соодветно во точките

A, B, C, D различни од P. Докажи дека

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PD}^2}.$$

Решение. Да земеме инверзија со центар во P и радиус r. Со X' да ја означиме сликата на X. Кружниците k_1, k_2, k_3, k_4 се пресликуваат во правите $k_1^{'}, k_2^{'}, k_3^{'}, k_4^{'}$, каде $k_1^{'} \parallel k_3^{'}$ и $k_2^{'} \parallel k_4^{'}$, па затоа $A'B'C'D'$ е паралелограм. Сега имаме $\overline{AB} = \frac{r^2}{\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}} \overline{A'B'}$, $\overline{PB} = \frac{r^2}{\overline{PB'}}$ итн. Бараното равенство се трансформира во еквивалентното равенство

$$\frac{\overline{PD'}^2}{\overline{PB'}^2} \cdot \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{D'C'}} = \frac{\overline{PD'}^2}{\overline{PB'}^2},$$

кое е точно бидејќи $\overline{A'B'} = \overline{D'C'}$ и $\overline{B'C'} = \overline{A'D'}$.

3. Нека k е кружницата опишана околу триаголникот ABC. Кружницата k_1 ги допира страните AC и BC, и одвнатре ја допира k во точката P. Тангентата на кружницата k_1 која е паралелна со AB и ја сече внатрешноста на триаголникот ABC ја допира k_1 во точката Q. Докажи дека $\measuredangle ACP = \measuredangle QCB$.

Решение. Нека тангентата на k_1 ги сече CA во A_1 и CB во B_1. Со X' да ја означиме сликата на X при инверзија со центар C и даден радиус. Кружницата k се пресликува во права $A'B'$, а кружницата k_1 се пресликува во кружница $k_1^{'}$ која ја ги допира правата AB и продолженијата на правите CA и CB. Значим $k_1^{'}$ е припишаната кружницана на триаголникот $A'B'C$ наспроти темето C, а нејзината допирна точка со $A'B'$ е сликата P' на точката P. Бидејќи Q е допирната точка на припишаната кружница со страна на триаголнкот A_1B_1C кој е сличен на триаголникот $B'A'C$ важи

$$\measuredangle QCB = \measuredangle P'CA' = \measuredangle PCA.$$

4. Нека ω е полукружница над дијаметар PQ. Кружницата k ја допира ω одвнатре и дијаметарот PQ во точката C. Нека AB е тангента на кружницата k нормална на PQ, каде A е на ω и B е на отсечката CQ. Докажи дека AC е симетрала на $\measuredangle PAB$.

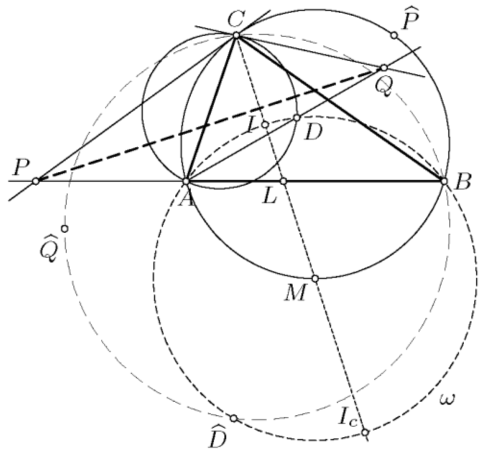
Решение. Земаме инверзија со центар C. Полукружницата ω се пресликува во полукружница ω' со центар на $P'Q'$, кружницата k во тангента на ω' паралелна на $P'Q'$, а правата AB се пресликува во кружница со центар на $P'Q'$ која ја допира k. Притоа оваа кружница ги сече ω' и $P'Q'$ во точките A' и B', соодветно. Сега $P'A'B'$ е рамнокрак триаголник со

$$\measuredangle PAC = \measuredangle A'P'C = \measuredangle A'B'C = \measuredangle BAC .$$

5. Во внатрешноста на $\triangle ABC\ (\overline{AC} \neq \overline{BC})$ дадена е точка D таква што важи $\measuredangle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle ACB$. Тангентите во точката C на кружниците опишани околу $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ ги сечат правите AB и AD соодветно во точките P и Q. Докажи дека правата PQ го полови $\measuredangle BPC$.

Решение. *Прв начин.* Со I да го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата CI ја сече страната AB во точката L и по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката M. Точката M е центар на опишаната кружница ω на $\triangle AIB$. Сега, од

$$\measuredangle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \measuredangle AIB$$



следува дека точката D исто така припаѓа на ω. Бидејќи $\overline{PC}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$ и $\overline{QC}^2 = \overline{QA}\cdot\overline{QD}$, точките P и Q имаат еднаков степен во однос на кружниците C (со радиус нула) и ω, па затоа PQ е радикална оска на овие две кружници. Значи, правата PQ е нормална на правата која ги поврзува центрите на овие две кружници, а тоа е правата CL. Бидејќи

$$\measuredangle PCL = \measuredangle PCA + \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \measuredangle CBA + \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \measuredangle CLP ,$$

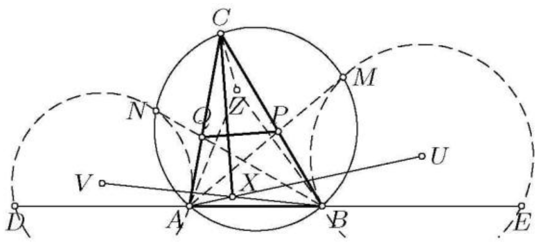
добиваме дека $\overline{PL} = \overline{PC}$, па затоа правата PQ го полови $\measuredangle CPL = \measuredangle BPC$.

Втор начин. Со X да ја означиме сликата на било која точка X при инверзија со центар C и квадрат на радиусот $\overline{CA}\cdot\overline{CB}$, комбинирана со симетрија во однос на правата CI. При оваа композиција точките A и B се пресликуваат една во друга. Бидејќи точката I се пресликува во центарот на припишаната кружница I_c наспроти точката C, заклучуваме дека кружницата ω се пресликува во самата себе, па затоа $D \in \omega$. Понатаму, кружниците ABC и ADC соодветно се пресликуваат во прави кои минуваат низ C и се паралелни со правите AB и BD. Според тоа, $BACP$ и $CBDQ$ се рамнокраки трапези ($CP \parallel AB$ и $CQ \parallel BD$), а M лежи на симетралата на отсечката BD, која воедно е симетрала и на отсечката CQ.

Треба да се докаже дека $\measuredangle CPB = 2\measuredangle CPQ$, т.е. $\measuredangle CAP = 2\measuredangle CQP$. Ова одма следува бидејќи $\overline{MP} = \overline{MC} = \overline{MQ}$, т.е. точката M е центар на кружницата CQP, па затоа $\measuredangle CAP = \measuredangle CMP = 2\measuredangle CQP$.

6. Даден е триаголник ABC. Нека точките D и E припаѓаат на правата AB и се такви што $D-A-B-E$, $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BE} = \overline{BC}$. Симетралите на внатрешните агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките P и Q, соодветно, а опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките M и N, соодветно. Правата која минува низ точката A и центарот на опишаната кружница околу триаголникот BME и правата кој минува низ точката B и центарот на опишаната кружница околу триаголникот AND се сечат во точката X, $X \neq C$. Докажи дека $CX \perp PQ$.

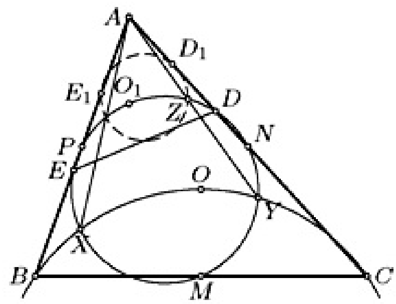
Решение. Со U да го означиме центарот на опишаната кружница околу $\triangle BME$. Да примениме инверзија со центар A и квадрат на радиусот на кружницата на инверзија $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. Точките B и C се пресликуваат во точките B' и C' кои се симетрични на точките C и B во однос на правата AP, точките P и M се пресликуваат една во друга, а E се пресликува во точката E' симетрична на Q во однос на AP. Според тоа, правата AU се совпаѓа со правата која ја поврзува A со центарот на кружницата $B'PE'$. Гледаме дека таа права е симетрична на правата AZ во однос на симетралата на аголот A, каде Z е центарот на кружницата опишана околу $\triangle CPQ$.



Аналогно се добива дека правата BZ е симетрична на правата која минува низ B и центарот V на кружницата AND во однос на симетралата на аголот B. Според теоремата на Чева во тригонометрски облик, правите симетрични на правите AU, BV, CX соодветно во однос на симетралите на аглите A, B, C исто така се сечат во една точка, што значи дека правата CZ е симетрична на CX во однос на симетралата на аголот C. Но, Z е центар на кружницата CPQ, од каде што следува дека правата CX ја содржи висината на триаголникот CPQ што и сакавме да докажеме.

7. Нека M, N и P се соодветно средините на страните BC, CA и AB, а O е

центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Опишаните кружници околу триаголниците BOC и MNP се сечат во различни точки X и Y внатре во $\triangle ABC$. Докажи дека $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$.



Решение. *Прв начин*. Со k_1 и k_2 да ги означиме соодветно кружниците MNP и BOC. Кружницата k_1 е Ојлеровата кружница во $\triangle ABC$ и минува низ подножјата D, E на висините од B,C и средината O_1 на отсечката AH, каде H е ортоцентарот на $\triangle ABC$.

Ќе докажеме дека втората пресечна точка Z на правата AY и кружницата k_1 лежи на Ојлеровата кружница k_3 на триаголникот ADE. Ќе сметаме дека Z е меѓу A и Y (доказот во другиот случај е аналоген). Нека D_1 и E_1 се соодветно средините на отсечките AD и AE. Од

$$\overline{AY}\cdot\overline{AZ} = \overline{AD}\cdot\overline{AN} = \overline{AD_1}\cdot\overline{AC}$$

следува дека точките Y,Z,C,D_1 се конциклични, па затоа $\measuredangle AZD_1 = \measuredangle ACY$. Аналогно $\measuredangle AZE_1 = \measuredangle ABY$, па затоа

$$\measuredangle D_1ZE_1 = \measuredangle AZD_1 + \measuredangle AZE_1 = \measuredangle ACY + \measuredangle ABY = \measuredangle BYC - \measuredangle BAC = \measuredangle BAC .$$

Оттука следува дека Z припаѓа на k_3.

Бидејќи O_1 е центар на опишаната кружница околу $\triangle ADE$, трансформацијата на сличност која го пресликува $\triangle ABC$ во $\triangle ADE$ исто така ги пресликува k_1 во k_2 и k_2 во k_3, па затоа слика на точката $X \in k_1 \cap k_2$ е точката $Z \in k_2 \cap k_3$. Според тоа, $\measuredangle BAX = \measuredangle DAZ = \measuredangle CAY$.

Втор начин. Ќе ги користиме ознаките од првиот начин на решавање. Нека $\Im$ е композиција на инверзија со центар A и квадрат на радиусот на кружницата на инверзија $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и симетријата во однос на симетралата на $\measuredangle CAB$. Пресликувањето $\Im$ ги пресликува B,C и N,P соодветно во N,P и B,C. Понатаму, за точката O важи $\measuredangle ANO = \measuredangle APO = 90^\circ$ па затоа нејзината слика O' е таква што $\measuredangle AO'B = \measuredangle AO'C = 90^\circ$, што значи дека $O' \equiv D$ е подножјето на висината AD на триаголникот ABC и исто така D се пресликува во O. Следува дека кружницата k_1, која минува низ D, се пресликува во k_2, а k_2 се пресликува во k_1. Според тоа, пресечните точки X,Y на кружниците k_1,k_2 се пресликуваат една во друга, па затоа $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$.

Литература

1. Lopandić, D.: Geometrija, https://www.scribd.com/document/44667591/LopandicGeometrija
2. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazareveć, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
3. Малчески, Р., Гроздев, С., Аневска, К.: Геометрија на комплексен број, Армаганка, Скопје, 2019, https://matematickitalent.mk/
4. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачи на Аполониј, Природно-математички факултет, Скопје, 1988