XXVI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Во едно училиште има 32 паралелки. Од нив 6 паралелки имаат по 29 ученика, 8 паралелки имаат по 30 ученика, 2 паралелки по 31 ученик, а останатите паралелки имаат по 32 ученика. Колку изнесува вкупниот број на ученици во училиштето?

Решение. Бројот на паралелки со 32 ученици е $32-6-8-2=16$. Вкупниот број на ученици е

$$6\cdot 29+8\cdot 30+2\cdot 31+16\cdot 32=174+240+62+512=988.$$

Задача 2. Ако една страна на квадратот се зголеми два пати, а другата се зголеми за 22 *mm*, се добива правоаголник чија обиколка (периметар) е за 2000 *mm* поголема од обиколката (периметарот) на квадратот. Колку е должината на страната на дадениот квадрат?

Решение. Ако страната на почетниот квадрат се означи со *a*, тогаш страните на правоаголникот се $2a$ и $a+22$. Збирот на двете страни на правоаголникот со должина $2a$ е колку што е периметарот на квадратот.Според тоа, збирот на должините на другите две страни, со должина $a+22$, изнесува 2000 *mm*. Значи,

$$2a+44=2000,\ 2a=1956, a=1956:2=978\,mm.$$

Задача 3. На две гранки се наоѓале 25 врапчиња. После извесно време, од првата прелетале на втората 5 врапчиња, а од втората во полето одлетале 7 врапчиња. Тогаш, на првата гранка останале два пати повеќе врапчиња отколку на втората. Колку врапчиња имало на секоја гранка на почетокот?

Решение. *Прв начин*. Кога во полето ќе одлетаат 7 врапчиња, вкупниот број на врапчиња на двете гранки ќе биде $25-7=18$ и тогаш според условот на задачата на првата гранка ќе има два пати повеќе врапчиња отколку на втората, значи на втората гранка ќе има $18:3=6$ врапчиња, а на првата гранка ќе има $2\cdot 6=12$ врапчиња. Значи, пред да одлетаат во полето 7 врапчиња од втората гранка, на неа имало $6+7=13$ врачиња.Па на почетокот, пред да прелетале од првата на втората гранка 5 врапчиња, на втората гранка имало $13-5=8$ врапчиња, а на првата гранка имало $12+5=17$ врапчиња.

Втор начин. На почетокот имало

$$2\cdot((25-7):3)+5=2\cdot(18:3)+5=2\cdot6+5=12+5=17$$

врапчиња на првата гранка и

$$(25-7):3+7-5=18:3+7-5=6+7-5=8$$

врапчиња имало на втората гранка.

Задача 4. Мила од цифрите 3, 7, 1, 9, 0 и 4 ги формирала најголемиот и најмалиот шестцифрен број употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш, а потоа нивната разлика ја намалила 9 пати. Кој број го добила Мила?

Решение. Најголемиот шестцифрен број составен од дадените цифри, употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш е бројот 974310,а најмалиот е бројот 103479. Кога нивната разлика $974310-103479=870831$, ја намалила 9 пати го добила бројот $870831:9=96759$.

Задачпа 5. Четири момчиња Андреј, Бојан, Васко и Гоце се колекционери на поштенски марки. Андреј има толку марки колку што имаат Бојан и Васко заедно, Гоце има пет пати помалку марки од Андреј, а Бојан четири пати повеќе од Васко. По колку марки има секое од момчињата, ако заедно тие имаат 5016 поштенски марки?

Решение. Нека *А, Б, В* и *Г* се бројот на марките што ги имаат Андреј, Бојан, Васко и Гоце соодветно. Според првиот услов на задачата, имаме

$$А=Б+В,\ А=5Г,\ Б=4В.$$

Тогаш, со замена се добива

$$А=Б+В=4В+В=5В.$$

Но $А=5Г$, па се добива дека Васко и Гоце имаат ист број марки, односно $В=Г$. Тогаш, според вториот услов

$$А+Б+В+Г=5016,$$

односно

$$5В+4В+В+В=5016.$$

Добиваме дека $11В=5016$, од каде $В=5016:11=456$, па $Г=456$, додека $А=5\cdot456=2280$ и $Б=4\cdot456=1824$. Значи, Андреј има 2280 марки, Бојан има 1824, а Васко и Гоце имаат по 456 поштенски марки.

V одделение

Задача 1. Имаме два сада (лонци) од кои едниот собира точно 3 литри, а другиот собира точно 5 литри. Дали со помош на двата лонци можеме да измериме точно 4 литри?

Решение. Прво го полниме садот од 3 литри и го претураме во садот од 5 литри, каде останува место за уште 2 литри.Потоа, повторно го полниме садот од 3 литри, па го дополнуваме садот од 5 литри, што значи дека во садот од 3 литри ќе остане 1 литар. Полниот сад од 5 литри го испразнуваме и во него го претураме едниот литар од садот со 3 литри. И конечно, го полниме по трет пат садот од 3 литри и го претураме во садот од 5 литри во кој од претходно има 1 литар. Така, во садот од 5 литри сега има точно 4 литри.

Задача 2. При множење на два броја, на првиот број ученикот му ја заменил цифрата на единиците 4 со 1. Така добил 525 наместо 600. Кои броеви ги множел?

Решение. Од условот имаме дека кога првиот број ке се намали за $4-1=3$, тогаш производот се намалил за $600-525=75$. Значи, тој број е $75:3=25$. Вториот број ќе го добиеме како $600:25=24$. Значи, ученикот ги множел броевите 25 и 24.

Задача 3. На еден тренинг имало 225 деца и 105 топки. Децата се поделени на групи со еднаков број на деца и на секоја група тренерите им поделиле топки, така што секоја група добила по еднаков број на топки. Колку групи се формирани и по колку топки им се поделени? Колку решенија има задачата?

Решение. Најнапред ги наоѓаме заедничките делители на броевите 225 и 105, тоа се броевите 1, 3, 5 и 15. Тие го означуваат бројот на групи кои се формирани. Значи, задачата има 4 решенија: 1 група од 225 ученика која добила 105 топки, 3 групи од по $225:3=75$ ученика и секоја група добила по $105:3=35$ топки, 5 групи од по $225:5=45$ ученика и секоја група добила по $105:5=21$ топка, 15 групи од по $225:15=15$ ученика и секоја група добила по $105:15=7$ топки.

Задача 4. Две прави се сечат во една точка и образуваат четири агли (два остри и два тапи). Збирот на накрсните остри агли е еднаков на половината од едниот накрсен тап агол. Одреди ги големините на аглите?

Решение. *Прв начин*. Накрсните остри агли се еднакви меѓу себе и нека нивната големина изнесува x. Тогаш, накрсните тапи агли имат големина $180°-x$. Од условот имаме дека $2x=\frac{1}{2}(180°-x)$, односно $4x=180°-x$, од каде $5x=180°$, па $x=36°$ е големината на накрсните остри агли.**(5)** Накрсните тапи агли имаат големина $180°-36°=144°$.

Втор начин. Нека α е накрсниот остар агол и β е накрсниот тап агол. Од условот на задачата имаме дека накрсниот тап агол е 2 пати поголем од збирот на накрсните остри агли, односно $\beta=2\cdot(\alpha+\alpha)=4\alpha$ или накрсниот тап агол е 4 пати поголем од накрсниот остар агол. Па, значи дека накрсниот остар агол изнесува $180°:5=36°$, додека накрсниот тап агол е $180°-36°=144°$.

Задача 5. Даден е правоаголник со страни *a cm* и *b cm*. Ако страната со должина *a cm* се продолжи за *b cm* и страната со должина *b cm* се продолжи за *a cm* се добива квадрат со плоштина $100cm^2$. Ако должините на страните на дадениот правоаголник се природни броеви, определи го правоаголникот со најмала плоштина.

Решение. Плоштината на добиениот квадрат е $P_{кв}=(a+b)^2=100cm^2$, значи $a+b=10cm$. Бидејќи должините на страните на правоаголникот се природни броеви, за a и b можни се некој од следниве парови вредности:

$$a=1,b=9;\ a=2,b=8;\ a=3,b=7;\ a=4,b=6;\ a=5,b=5;$$
$$a=6,b=4;\ a=7,b=3;\ a=8,b=2\ \ \text{или}\ a=9,b=1$$

Правоаголникот со најмала плоштина $P_{пр}=ab$, се добива за $a=1,b=9$ или $a=9,b=1$ и изнесува $P_{пр}=9cm^2$.

VI одделение

Задача 1. Најди го збирот на сите непарни трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 140.

Решение. Од разложувањето $140=2\cdot2\cdot5\cdot7=4\cdot5\cdot7$, следува дека трицифрените броеви се составени од цифрите 4, 5 и 7. Непарните трицифрени броеви составени од тие цифри се 457, 475, 547 и 745. Па, нивниот збир е еднаков на $457+475+547+745=2224$.

Задача 2. Маја отишла во книжара да купи две книги. Цената на едната книга била 65%, а цената на другата книга била 57,5% од парите што ги имала. За да ги купи двете книги и недостигале 45 денари. Колку пари имала со себе Маја?

Решение. *Прв начин.* Нека Маја имала со себе x денари. Тогаш, од условот на задачата имаме дека $\frac{65}{100}x+\frac{57,5}{100}x=45+x$, односно

$$65x+57,5x=4500+100x,$$

па $22,5x=4500$, и конечно $x=200$. Значи, Маја имала 200 денари.

Втор начин. Книгите кои Маја сакала да ги купи биле

$$65\%+57,5\%=122,5\%$$

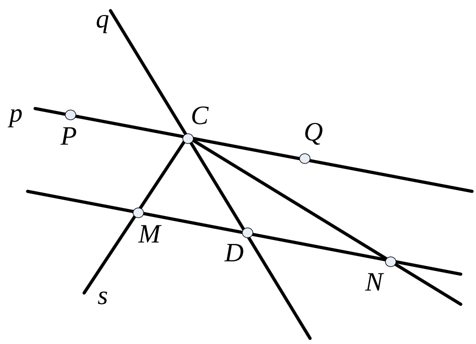
од парите кои ги носела со себе. Значи, и недостигале

$$122,5\%-100\%=22,5\%$$

од парите кои ги носела со себе, од друга страна и недостигале 45 денари според условот. Ако Маја носела со себе x денари, ја имаме равенката $\frac{22,5}{100}x=45$, чие решение е $x=200$. Значи, Маја имала 200 денари.

Задача 3. Две прави *p* и *q* се сечат во точката *C*. Точката *C* ја дели правата *p* на две полуправи, кои со една иста полуправа од правата *q* со почетна точка *C* градат два агли *pCq* и *qCp*. На симетралата на аголот *pCq* избрана е точка *M*, а на симетралата на аголот *qCp* избрана е точка *N* така што $MN\parallel p$. Отсечката *MN* ја сече правата *q* во точка *D*. Докажи дека *D* е средина на отсечката *MN*.

Решение. Нека *P* е точка од полуправата *Cp* од аголот *pCq*, и нека *Q* е точка од полуправата *Cp* од аголот *qCp*. Нека *CM* е симетралата на аголот *pCq* и *CN* е симетралата на аголот *qCp*, при што $MN\parallel PQ$, и нека *D* е пресечната точка на правата *q* со правата *MN* (види цртеж). Од *CM* е симетрала на аголот *pCq* и *CN* е симетрала на аголот *qCp* имаме дека $\measuredangle PCM=\measuredangle MCD$ и $\measuredangle DCN=\measuredangle NCQ$. Како наизменични агли на трансферзала имаме дека $\measuredangle PCM=\measuredangle CMD$ и $\measuredangle NCQ=\measuredangle CND$. Значи, $\measuredangle MCD=\measuredangle CMD$ и $\measuredangle DCN=\measuredangle DNC$, од каде следи дека триаголниците ΔCMD и ΔCND се рамнокраки со основа *MC* и *NC* соодветно.Според тоа $\overline{MD}=\overline{CD}$ и $\overline{CD}=\overline{DN}$. Од последните две равенства следува дека $\overline{MD}=\overline{DN}$, односно дека *D* е средина на отсечката *MN*.



Задача 4. Илина од новоотворена ќеса со бомбони изела $\frac{1}{5}$ од вкупниот број на бомбони и уште 3 бомбони. Од преостанатиот број на бомбони, вториот ден изела $\frac{1}{5}$ од бомбоните и уште 5 бомбони. Третиот ден ги изела преостанатите 15 бомбони. Колку бомбони имало во ќесата на почетокот?

Решение. Според условот на задачата, ако x е вкупниот број на бомбони, Илина првиот ден изела $\frac{1}{5}x+3$ бомбони, а во ќесата останале $\frac{4}{5}x-3$ бомбони. Вториот ден Илина изела $\frac{1}{5}(\frac{4}{5}x-3)+5$ бомбони и за третиот ден и останале 15 бомбони. Според тоа,

$$\frac{1}{5}x+3+\frac{1}{5}(\frac{4}{5}x-3)+5+15=x,$$

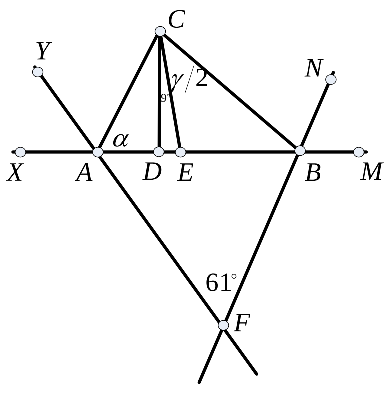
од каде

$$x+15+\frac{4}{5}x-3+100=5x,\ 112=4x-\frac{4}{5}x,\ 560=16x,\ x=35.$$

Значи, на почетокот во ќесата имало 35 бомбони.

Задача 5. Пресметај ги аглите во триаголникот ABC, ако аголот меѓу висината повлечена од темето C и симетралата на аголот ACB изнесува $9°$, а аголот меѓу симетралите на надворешните агли кај темињата A и B изнесува $61°$.

Решение. Да ги означиме со α,β,γ аглите во триаголникот ABC кај темињата A,B,C соодветно и со $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ соодветните надворешни агли. Нека D е подножјето на висината од темето C, точката E е подножјето на симетралата на аголот ACB и нека F е пресекот на симетралите AY и BN на надворешните агли кај темињата A и B соодветно (види цртеж).



Тогаш од услов,

$$\measuredangle DCE=9°,\ \measuredangle AFB=61°,\ \measuredangle XAY=\measuredangle YAC=\frac{\alpha_1}{2},$$

$$\measuredangle CBN=\measuredangle NBM=\frac{\beta_1}{2} \text{ и } \measuredangle ACE=\measuredangle ECB=\frac{\gamma}{2}.$$

За аглите во триаголникот ABF имаме дека

$$\measuredangle FAB = \measuredangle XAY = \frac{\alpha_1}{2} \text{ и } \measuredangle ABF = \measuredangle NBM = \frac{\beta_1}{2}$$

како накрсни агли, па од збир на агли на еден триаголник имаме

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\beta_1}{2} + 61^\circ = 180^\circ,$$

од каде се добива дека

$$\alpha_1 + \beta_1 = 238^\circ. \text{ Од } \alpha_1 = 180^\circ - \alpha \text{ и } \beta_1 = 180^\circ - \beta$$

со замена во последното равенство се довива

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 238^\circ,$$

од каде $\alpha + \beta = 122^\circ$, па

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ.$$

Потоа, од правоаголниот триаголник ADC имаме дека

$$\alpha = 90^\circ - \measuredangle ACD = 90^\circ - (\frac{\gamma}{2} - \measuredangle CDE) = 90^\circ - (\frac{58^\circ}{2} - 9^\circ) = 70^\circ$$

и конечно

$$\beta = 122^\circ - \alpha = 122^\circ - 70^\circ = 52^\circ.$$

VII одделение

Задача 1. Дропките $\frac{\overline{3a5b}}{36}$ и $\frac{\overline{4c7d}}{45}$ се природни броеви, каде a,b,c,d се цифри. Подреди ги по големина сите вакви броеви.

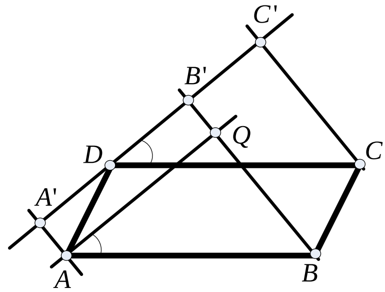
Решение. Дропките $\frac{\overline{3a5b}}{36}$ и $\frac{\overline{4c7d}}{45}$ се природни броеви ако $\overline{3a5b}$ е делив со 36 (значи со 4 и 9) и $\overline{4c7d}$ е делив со 45 (значи со 5 и 9). Во првиот случај тоа е можно ако последната цифра е 2 или 6, па поради деливост со 9 можни броеви се: $\frac{3456}{36} = 96$ и $\frac{3852}{36} = 107$. Во вториот случај последната цифра е 0 или 5, па поради деливоста со 9 можни се случаите: $\frac{4275}{45} = 95$ и $\frac{4770}{45} = 106$. Значи, подредени по големина броевите се

$$\frac{4275}{45} < \frac{3456}{36} < \frac{4770}{45} < \frac{3852}{36}$$

Задача 2. Низ темето *D* од паралелограмот *ABCD* е повлечена произволна права *p*, така што темињата *A*, *B* и *C* се на иста страна во однос на правата *p*. Нека *A'*, *B'* и *C'* се подножјата на нормалите повлечени кон правата *p*, од точките *A*, *B* и *C* соодветно. Докажи дека

$$\overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{CC'}.$$

Решение. Нека A', B' и C' се подножјата на нормалите повлечени кон правата p, од точките A, B и C соодветно. Нека правата паралелна со p, повлечена низ точката A ја сече правата BB' во точката Q (види цртеж).



Четириаголникот $AQB'A'$ има 3 прави агли, па тој е правоаголник, од што следува дека $\overline{AA'}=\overline{QB'}$. Бидејќи $ABCD$ е паралелограм, следува дека $\overline{AB}=\overline{DC}$ и $AB \parallel DC$. Аглите $\measuredangle QAB$ и $\measuredangle C'DC$ се еднакви како агли со паралелни краци. Бидејќи BB' и CC' се нормални на правата p, следува дека се тие меѓусебно паралелни. Од тоа следува дека и аглите $\measuredangle QBA$ и $\measuredangle C'CD$ се еднакви како агли со паралелни краци. Сега, за триаголниците ΔABQ и $\Delta DCC'$ имаме $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\measuredangle QAB=\measuredangle C'DC$ и $\measuredangle QBA=\measuredangle C'CD$, па од признакот АСА следува дека $\Delta ABQ \cong \Delta DCC'$. Од складноста на овие триаголници следува дека $\overline{CC'}=\overline{BQ}$.

Од $\overline{AA'}=\overline{QB'}$ и $\overline{CC'}=\overline{BQ}$ следува дека $\overline{BB'}=\overline{QB'}+\overline{BQ}=\overline{AA'}+\overline{CC'}$.

Задача 3. Ако n е природен број, дали бројот

$$(2n-3)(2n-1)\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)+16$$

е полн квадрат? Дали бројот 2005·2007·2009·2011 + 16 е полн квадрат?

Решение. Бидејќи

$$(2n-3)(2n+3)=4n^2-9 \quad \text{и} \quad (2n-1)(2n+1)=4n^2-1,$$

добиваме

$$\begin{aligned}(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16 &= (4n^2-9)(4n^2-1)+16 \\ &= 16n^4-40n^2+25=(4n^2-5)^2\end{aligned}$$

Значи, $(2n-3)(2n-1)\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)+16$ е полн квадрат.

Бројот 2005·2007·2009·2011 + 16 е полн квадрат, бидејќи може да се употреби резултатот од прvиот дел од задачата за n = 1004. Според тоа

$$2005\cdot 2007\cdot 2009\cdot 2011+16=(4\cdot 1004^2-5)^2=1008016^2 .$$

Задача 4. Дадено е равенството

1*2*3*4*5*6*7*8*9=0.

Дали е можно на местата од * да се поставаат симболите + и – за да се добие точно равенство?

Решение. Збир или разлика на два парни или на два непарни броеви е парен број. Збир или разлика на броеви со различна парност (парен и непарен или непарен и парен) е непарен број**.** На левата страна од равенството има 4 парни и 5 непарни броеви. Било која комбинација на симболите + и – ќе даде непарен број, а 0 е парен број. Значи, не е можно да се добие равенство**.** (За решавање на специјални случаи не се даваат повеќе од **7** поени; вкупно се можни 512 распореди на + и -).

Задача 5. Дадени се произволни триаголници $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точките T_1 и T_2 се нивни тежишта, соодветно. Докажи дека

$$3\overrightarrow{T_1T_2}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}\,.$$

Решение. Од својствата на операцијата собирање на вектори, имаме

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2A_2}\,,\ \overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2B_2}\,,\ \overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2C_2}\,.$$

Ако ги собереме последните три векторски равенства и ги искористиме својствата на операцијата собирање на вектори, добиваме:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=3\overrightarrow{T_1T_2}+(\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{C_1T_1})+(\overrightarrow{T_2A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_2C_2})\,. \qquad (1)$$

Од дефиницијата на тежишна линија и од својствата на тежиштето, имаме:

$$\overrightarrow{A_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}),\ \overrightarrow{B_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}),\ \overrightarrow{C_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{C_1A_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{C_1T_1}&=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1})+\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1})+\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{C_1A_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1})\\&=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1A_1})+\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{A_1B_1})\\&=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_1}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{B_1B_1}=\tfrac{2}{3}\vec{o}+\tfrac{1}{3}\vec{o}=\vec{o}+\vec{o}=\vec{o}\end{aligned}$$

Слично, имаме

$$\overrightarrow{A_2T_2}+\overrightarrow{B_2T_2}+\overrightarrow{C_2T_2}=\vec{o}\,,$$

од каде добиваме дека

$$\overrightarrow{T_2A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_2C_2}=\vec{o}\,.$$

Конечно, ако замениме во (1), имаме

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=3\overrightarrow{T_1T_2}+\vec{o}+\vec{o}=3\overrightarrow{T_1T_2}\,.$$

VIII одделение

Задача 1. За кои вредности на променливите x и y, разликата на изразите $\frac{2x+15}{8}$ и $1\frac{1}{3}\cdot(y-1)$ ќе биде 3 пати помала од изразот $2\cdot(5-2y)$, а изразот $\frac{x+5\frac{3}{4}}{2}$ ќе биде за $0{,}125$ поголем од $3y$?

Решение. Од условот на задачата се добиваат равенките

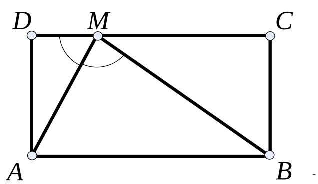
$$\frac{2x+15}{8}-1\frac{1}{3}\cdot(y-1)=\frac{2\cdot(5-2y)}{3} \text{ и } \frac{x+5\frac{3}{4}}{2}=3y+0{,}125.$$

Тие се еквивалентни на $6x=3$ и $4x-24y=-22$ соодветно. Решението на последниот систем линеарни равенки е $x=\frac{1}{2}$, $y=1$.

Задача 2. Даден е правоаголникот *ABCD* кај кој должината на страната *AB* е два пати поголема од должината на страната *BC*. На страната *CD* е избрана точка *M* така што аголот *AMD* е еднаков на аголот *AMB*.

а) Определи го аголот *AMD*.

б) Ако $\overline{DM}=1$, колкава е плоштината на правоаголникот *ABCD*?



Решение. Бидејќи *AB* и *CD* се паралелни, $\measuredangle BAM=\measuredangle AMD$ (наизменични агли). Од условот $\measuredangle AMB=\measuredangle AMD$, па заклучуваме дека $\measuredangle BAM=\measuredangle AMB$. Значи, триаголникот *AMB* е рамнокрак и $\overline{AB}=\overline{MB}$. Во триаголникот *BCM* хипотенузата *BM* е два пати поголема од катетата *BC* ($\overline{AB}=2\overline{BC}$, а $\overline{AB}=\overline{MB}$). Тогаш $\measuredangle BMC=30^\circ$, па

$$\measuredangle AMB+\measuredangle AMD=150^\circ.$$

Од овде добиваме дека

$$\measuredangle AMB=\measuredangle AMD=75^\circ.$$

Нека $\overline{BC}=b,\ \overline{CD}=2b$. Од условот $\overline{DM}=1$ имаме

$$\overline{CD}=\overline{CM}+\overline{MD}=\overline{CM}+1, \text{ т.е. } 2b=\overline{CM}+1.$$

Од Питагоровата теорема следува дека

$$\overline{CM}=\sqrt{\overline{BM}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(2b)^2-b^2}=b\sqrt{3}.$$

Според тоа $2b=b\sqrt{3}+1$, односно $b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$. Плоштината на правоаголникот е $P=ab=2b^2=2(2+\sqrt{3})^2=2(7+4\sqrt{3})$.

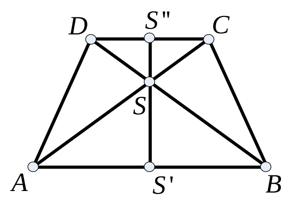
Задача 3. Наставничката подредила во редица 20 ученици од една паралелка и им поделила 800 бонбони. Секој ученик добил задача да го пресмета количникот $\frac{x}{x+2k-1}$, каде што x е бројот на бонбони што ги добил, а k е редниот број на местото на ученикот во редицата броејќи од лево кон десно. Сите ученици добиле ист количник. Колку бонбони добил ученикот кој имал реден број 12?

Решение. Нека претпоставиме дека првиот ученик добил x_1 бонбони, вториот x_2 бонбони, ... , а дваесеттиот ученик добил x_{20} бонбони. Според тоа, $x_1+x_2+\dots+x_{20}=800$. Нека $\frac{x_k}{x_k+2k-1}=M$, од каде $x_k=(2k-1)\frac{M}{1-M}$. Па, за збирот $x_1+x_2+\dots+x_{20}$ добиваме

$$x_1+x_2+\dots+x_{20}=\frac{M}{1-M}(1+3+5+\dots+39)=\frac{M}{1-M}\frac{40\cdot 20}{2}=400\frac{M}{1-M}.$$

Од условот $x_1+x_2+\dots+x_{20}=800$, имаме $400\frac{M}{1-M}=800$, т.е. $\frac{M}{1-M}=2$. Според тоа, ученикот кој имал реден број 12 добил $x_{12}=(2\cdot 12-1)\cdot 2=46$ бонбони.

Задача 4. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h, а неговата плоштина е h^2. Под кој агол се сечат дијагоналите на трапезот?



Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD и висина h чија плоштина е $P=h^2$. Точката S е пресек на дијагоналите, а S' и S'' се подножјата на нормалите спуштени врз основите AB и CD соодветно. Триаголниците $SS''D$ и $SS'B$ се слични, бидејќи имаат еднакви агли. Според тоа $\overline{SS''}:\overline{DS''}=\overline{SS'}:\overline{BS'}$. Ако a и b се должините на основите, а $\overline{SS'}=h_1$ и $\overline{SS''}=h_2$, тогаш $h_1+h_2=h$ и $h_2:\frac{b}{2}=h_1:\frac{a}{2}$. Значи,

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{2}\frac{h_1}{h_2}. \qquad (1)$$

Од условот на задачата имаме $\frac{a+b}{2}h=h^2$, односно $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=h$. Од равенството (1) и претходната формула добиваме $\frac{b}{2}\frac{h_1}{h_2}+\frac{b}{2}=h$, односно $\frac{b}{2}=h_2$. Слично се добива дека $\frac{a}{2}=h_1$. Според тоа $SS''D$ и $SS'B$ се рамнокраки правоаголни триаголници. Аголот под кој се сечат дијагоналите на трапезот е 90°.

Задача 5. Докажи дека збирот на шест последователни природни броеви, од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, а не е делив со 42. Определи шест такви броеви чиј збир е четирицифрен број и претставува квадрат на некој природен број.

Решение. Ниеден од шестте последователни природни броеви не е делив со 7, па тие се од облик 7*n*+1, 7*n*+2, 7*n*+3, 7*n*+4, 7*n*+5 и 7*n*+6, $n \in N_0$. Нивниот збир е $S = 42n + 21 = 21(2n+1)$, од каде што следува дека S е делив со 21 но не е делив со 42 (при делење со 42 се добива остаток 21).За да биде *S* квадрат на некој природен број мора да важи $2n+1 = 21k^2$ за некој непарен број *k*, а за да биде *S* четирицифрен број мора да важи $2 < k^2 < 23$.Ова е можно само ако $k^2 = 9$, од каде што се добива дека $2n+1 = 21k^2 = 189$ и $n = 94$. Бараните броеви се 659, 660, 661, 662, 663 и 664.