

Čebiševljeva nejednakost

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. U radu je dokazana Čebiševljeva nejednakost. Na velikom broju zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola pokazane su različite primjene te nejednakosti.

Ključne riječi: nejednakost, Čebiševljeva nejednakost

Chebichev's inequality

Abstract. In the paper Chebishev's inequality is proved. Various applications of the inequality in question are shown by numerous tasks adapted for high-school pupils.

Key words: inequality, Chebishev's inequality

Čebiševljeva nejednakost se rjeđe primjenjuje u zadacima elementarne matematike, no neke se zadatke mogu riješiti jedino pomoću ove nejednakosti. Iskazat ćemo Čebiševljevu nejednakost, dokazati ju i pokazati njenu primjenu na nekoliko zadataka.

Teorem 1 [Čebiševljeva nejednakost]. Neka su $(a_1, \dots, a_n)$ i $(b_1, \dots, b_n)$ dvije n -torke realnih brojeva.

- (i) Ako je ili $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ ili $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, onda vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (1)$$

Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ili $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

- (ii) Ako je ili $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ ili $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, onda vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (2)$$

Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ili $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Dokaz.

(i) Vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (a_k b_k - a_k b_l) &= \sum_{k=1}^n \left(n a_k b_k - a_k \sum_{l=1}^n b_l \right) \\ &= n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{l=1}^n b_l. \end{aligned} \quad (3)$$

U prvoj od tih dvostrukih suma zamijenimo indekse k i l i promijenimo redoslijed sumacija pa dobivamo

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (a_l b_l - a_l b_k) = n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{l=1}^n b_l. \quad (4)$$

Zbrojimo li (3) i (4) te podijelimo s 2, dobivamo

$$\begin{aligned} &n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{l=1}^n b_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (a_k b_k - a_k b_l + a_l b_l - a_l b_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (a_k - a_l)(b_k - b_l) \geq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

jer je

$$(a_k - a_l)(b_k - b_l) \geq 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, n,$$

odakle dijeljenjem s n^2 dobivamo nejednakost (1).

Ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ili $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, tada u (1) vrijedi jednakost. Obratno, ako u (1) vrijedi jednakost, tada jednakost vrijedi i u (5), pa je $(a_k - a_l)(b_k - b_l) = 0$ za sve $k, l = 1, 2, \dots, n$. Posebno je $(a_1 - a_n)(b_1 - b_n) = 0$, odakle slijedi $a_1 = a_n$ ili $b_1 = b_n$. Ako je $a_1 = a_n$, tada zbog uvjeta koji zadovoljava n -torka $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vrijedi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, a ako je $b_1 = b_n$, tada zbog uvjeta koji zadovoljava n -torka $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vrijedi $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

(ii) Dokazuje se analogno kao (i), uzevši u obzir da je u ovom slučaju

$$(a_k - a_l)(b_k - b_l) \leq 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

□

Nejednakost (1) često pišemo u obliku

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

a nejednakost (2) u obliku

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \geq n \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Sada se najprije prisjetimo nekih činjenica o nejednakostima.

Neka je $a = (a_1, \dots, a_n)$ dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada su harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina definirane redom sa

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Poznato je da vrijedi

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a).$$

Pri tom jednakosti vrijede ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Nejednakosti $G_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq G_n(a)$, $K_n(a) \geq A_n(a)$, nazivamo redom GH, AH, AG, KA nejednakost.

Neka je dana n -torka $a = (a_1, \dots, a_n)$ pozitivnih brojeva i realan broj $r \neq 0$. Sredina reda r definirana je izrazom

$$M_n^{[r]}(a) = \left(\frac{a_1^r + \dots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Uočimo da je sredina reda 1 upravo aritmetička sredina tj. $M_n^{[1]}(a) = A_n(a)$. Vrijedi nejednakost

$$M_n^{[s]}(a) \leq M_n^{[t]}(a) \quad \text{za} \quad -\infty < s < t < +\infty.$$

Dokaz navedene tvrdnje može se vidjeti u [2].

Zadatak 1. Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova (u radijanima) trokuta ABC . Dokažite da vrijedi

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Rješenje. Možemo pretpostaviti da je $a \leq b \leq c$. Tada je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Prema Čebiševljevoj nejednakosti je

$$(a + b + c)(\alpha + \beta + \gamma) \leq 3(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

tj.

$$(a + b + c)\pi \leq 3(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

odnosno

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Zadatak 2. Neka su x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}.$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Tada je i $\ln x_1 \leq \ln x_2 \leq \dots \leq \ln x_n$, pa primjenom Čebiševljeve nejednakosti imamo redom

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) \leq n(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + \dots + x_n \ln x_n),$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \ln(x_1 x_2 \dots x_n) \leq n(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + \dots + x_n \ln x_n),$$

$$\ln(x_1 x_2 \dots x_n) \leq \frac{n(\ln x_1^{x_1} + \ln x_2^{x_2} + \dots + \ln x_n^{x_n})}{x_1 + x_2 + \dots + x_n},$$

$$\ln(x_1 x_2 \dots x_n) \leq \frac{n \ln(x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n})}{x_1 + x_2 + \dots + x_n},$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \ln(x_1 x_2 \dots x_n) \leq \ln(x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}),$$

$$\ln \left((x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \right) \leq \ln(x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}),$$

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}.$$

Zadatak 3. Neka su a, b, c duljine stranica, t_a, t_b, t_c duljine težišnica, v_a, v_b, v_c duljine visina i P površina trokuta ABC . Dokažite da vrijedi

$$(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)(v_a^2 + v_b^2 + v_c^2) \geq 27P^2.$$

Rješenje. Dokažimo najprije da za trokut ABC vrijedi jednakost

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Neka su A_1, B_1, C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC i neka je $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $|AA_1| = t_a$, $|BB_1| = t_b$, $|CC_1| = t_c$. Primijenimo redom poučak o kosinusu na trokute ABC i ABB_1 . Dobivamo:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \alpha = \frac{c^2 + \frac{b^2}{4} - t_b^2}{2 \cdot c \cdot \frac{b}{2}}.$$

Izjednačavanjem desnih strana i sređivanjem dobivamo

$$4t_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2.$$

Analogno bismo dobili

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2, \quad 4t_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2.$$

Zbrajanjem ovih triju jednakosti i dijeljenjem sa 4 dobivamo

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Stoga je nejednakost koju treba dokazati ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)(v_a^2 + v_b^2 + v_c^2) \geq 27P^2,$$

a ova ekvivalentna nejednakosti

$$(a^2 + b^2 + c^2)(v_a^2 + v_b^2 + v_c^2) \geq 36P^2.$$

Dokažimo posljednju nejednakost. Neka je $a \leq b \leq c$. Tada je $v_a \geq v_b \geq v_c$ pa je prema Čebiševljevoj nejednakosti

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(v_a^2 + v_b^2 + v_c^2) &\geq 3(a^2v_a^2 + b^2v_b^2 + c^2v_c^2) \\ &= 3(4P^2 + 4P^2 + 4P^2) = 36P^2. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Zadatak 4. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC , s njegov poluopseg, a n prirodan broj. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je $a \leq b \leq c$. Tada je $a^n \leq b^n \leq c^n$ i $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$. Primijenimo Čebiševljevu nejednakost na trojke (a^n, b^n, c^n) i $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$, pa dobivamo redom

$$(a^n + b^n + c^n) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \leq 3 \left(a^n \cdot \frac{1}{b+c} + b^n \cdot \frac{1}{c+a} + c^n \cdot \frac{1}{a+b} \right),$$

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right). \quad (6)$$

Primijenimo AH nejednakost na brojeve $a+b, b+c, c+a$:

$$\frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}} \leq \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}} \leq \frac{2(a+b+c)}{3},$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9,$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}. \quad (7)$$

Prema nejednakosti aritmetičke sredine i sredine reda n je

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n. \quad (8)$$

Iz (7) i (8) slijedi

$$\begin{aligned} & \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot (a+b+c)^{n-1} = \\ & = \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot (2s)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}. \end{aligned}$$

Tada je zbog (6)

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}.$$

Zadatak 5. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da je*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Dokažimo općenitije da uz zadane uvjete za svaki $\beta \geq 2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{a^\beta(b+c)} + \frac{1}{b^\beta(c+a)} + \frac{1}{c^\beta(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (9)$$

Uvedimo zamjenu:

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad z = \frac{1}{c}.$$

Nejednakost (9) tada poprima oblik

$$\frac{x^{\beta-1}}{y+z} + \frac{y^{\beta-1}}{z+x} + \frac{z^{\beta-1}}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Jednostavnosti radi stavimo $\alpha = \beta - 1$. Tada je $\alpha \geq 1$ i prethodna nejednakost prelazi u nejednakost

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \quad \alpha \geq 1. \quad (10)$$

Za $\alpha = 1$ ova nejednakost vrijedi što dokazujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \\ = & \frac{x+y+z}{y+z} - 1 + \frac{y+z+x}{z+x} - 1 + \frac{z+x+y}{x+y} - 1 \\ = & (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3 \\ = & 3(x+y+z) \cdot \frac{\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}}{3} - 3. \end{aligned}$$

Kako je prema AH nejednakosti

$$\frac{(x+y) + (z+x) + (y+z)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{y+z}},$$

tj.

$$2(x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq 9,$$

odnosno

$$(x+y+z) \cdot \frac{\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}}{3} \geq \frac{3}{2},$$

to je

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Neka je sada $x \geq y \geq z$. Tada je $x^{\alpha-1} \geq y^{\alpha-1} \geq z^{\alpha-1}$ i $\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y}$. (Primjerice, iz $x \geq y$ slijedi $y+z \leq x+z$ pa je $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x}$ i stoga $\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x}$.) Primijemo sada Čebiševljevu nejednakost na trojke $(x^{\alpha-1}, y^{\alpha-1}, z^{\alpha-1})$ i $(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y})$. Imamo redom

$$\begin{aligned} (x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) & \leq 3 \left(\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \right), \\ \frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} & \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}}{3}. \end{aligned}$$

Prema AG nejednakosti i iz uvjeta $xyz = 1$ slijedi

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} z^{\alpha-1}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-1}} = \frac{3}{2}.$$

Kako smo dokazali da vrijedi nejednakost (10), to vrijedi i nejednakost (9), a onda vrijedi i polazna nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$, tj. $a = b = c$.

Zadatak 6. Neka su a, b, c duljine stranica, α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova u radijanima. Dokazite da vrijedi nejednakost

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{12s}{\pi},$$

gdje je s poluopseg trokuta.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a \leq b \leq c$. Tada je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $a+b \leq a+c \leq b+c$ i $\frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}$. Primijenimo Čebiševljevu nejednakost na trojke $(a+b, a+c, b+c)$ i $(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$ pa dobivamo redom

$$((a+b) + (a+c) + (b+c)) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \leq 3 \left(\frac{a+b}{\gamma} + \frac{a+c}{\beta} + \frac{b+c}{\alpha} \right),$$

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \leq 3 \left(\frac{a+b}{\gamma} + \frac{a+c}{\beta} + \frac{b+c}{\alpha} \right),$$

$$4s \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \leq 3 \left(\frac{a+b}{\gamma} + \frac{a+c}{\beta} + \frac{b+c}{\alpha} \right),$$

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{4}{3}s \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Kako je prema AH nejednakosti

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3 \cdot \frac{3}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{9}{\pi},$$

to je

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{4}{3}s \cdot \frac{9}{\pi} = \frac{12s}{\pi}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut.

Zadatak 7. Neka su a, b, c duljine stranica, α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova (u radijanima) trokuta ABC . Dokažite da vrijedi

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} \leq \frac{1}{2}.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je $a \leq b \leq c$. Tada je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ i stoga $\cos \alpha \geq \cos \beta \geq \cos \gamma$. Primjenom Čebiševljeve nejednakosti na trojke (a, b, c) i $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ dobivamo

$$(a + b + c)(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \geq 3(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma),$$

odakle je

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} \leq \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3}.$$

Dokažimo sada da je $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$. Imamo

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos (\pi - (\alpha + \beta))$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) \\
&= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\
&= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \\
&= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + 1 \\
&\leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + 1 \\
&= 2 \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + 1 \\
&= 2 \left(\frac{1}{4} - \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) + 1 \leq 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 8. Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova (u radijanima) trokuta ABC . Dokažite da vrijedi

$$\frac{a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + c \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{a + b + c} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rješenje. Možemo pretpostaviti da je $a \leq b \leq c$. Tada je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ i stoga $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \leq \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Primjenom Čebiševljeve nejednakosti na trojke (a, b, c) i $(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})$ dobivamo

$$(a + b + c) \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \leq 3 \left(a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + c \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right),$$

tj.

$$\frac{a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + c \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{a + b + c} \geq \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{3}.$$

Da bismo dokazali da je $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$, dokažimo najprije da je $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$. Iz $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)$ slijedi $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)}$,

pa je

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\
&= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \\
&= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \\
&= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \\
&= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
& \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 \\
&= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \\
&= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 2
\end{aligned}$$

odakle je

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 - 2.$$

Prema KA nejednakosti imamo redom

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{3} &\leq \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{3}}, \\
\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2}{9} &\leq \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{3}, \\
\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 &\leq 3 \left(\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 - 2 \right), \\
-2 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 &\leq -6, \\
\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 &\geq 3, \\
\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &\geq \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Literatura

- [1] D. S. MITRINOVIĆ, D. MIHAILOVIĆ, P. M. VASIĆ, *Linearna algebra. Polinomi. Analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
- [2] D. S. MITRINOVIĆ, P. M. VASIĆ, *Sredine*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1969.
- [3] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.
- [4] J. REIMAN, S. DOBOS, *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959–2003*, Typotex, Budapest, 2003.