XXXVII олимпијада

1. Дадена е правоаголна табла $ABCD$ со димензии $\overline{AB}=20$ и $\overline{BC}=12$, која е поделена на 20×12 единечни квадрати.

Нека $r\in\mathbb{N}$. Монета може да биде придвижена од еден квадрат на друг ако и само ако растојанието меѓу центрите на двата квадрата е $\sqrt{r}$. Целта е да се најде низа од движења на монетата од квадратот чие теме е A до квадратот чие теме е B.

a) Докажи дека целта не може да се постигне ако r е делив со 2 или 3.

b) Докажи дека целта може да се постигне ако $r=73$.

c) Дали целта може да се постигне ако $r=97$?

Решение. Работиме на решетка $\mathbb{A}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid 0\le x\le 19,\, 0\le y\le 11\}$. Ако монетата ја придвижиме од точката $P(x_1,y_1)$ до точката $Q(x_2,y_2)$, таа ќе помине растојание $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, односно $d=\sqrt{x^2+y^2}$, каде $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2\in\mathbb{Z}$. Значи, $x^2+y^2=r$.

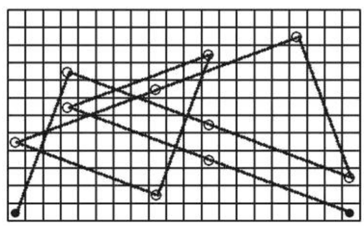
a) Ако $r=2k$, тогаш $x^2+y^2=2k$, што е можно ако и само ако x и y се со иста парност. Со A_1,B_1,C_1 и D_1 да ги означиме центрите на квадратите со темиња A,B,C,D соодветно. Нека поставиме правоаголен координатен систем таков што $A_1(0,0)$, $B_1(19,0)$, $D_1(0,12)$ и $C_1(19,12)$. Тогаш монетата може да се помести од полето (p_1,q_1) на полето (p_2,q_2) ако и само ако

$$p_1+q_1=p_2+q_2 \pmod 2,\ \text{т.е.}\quad p_1-p_2\equiv q_1-q_2 \pmod 2.$$

Но, бидејќи $A_1(0,0)$ и $B_1(19,0)$ од $0+0\not\equiv 19+0 \pmod 2$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

Нека $r=3k$, т.е. $x^2+y^2=3k$. Ако $x=3p$, тогаш мора да е $y=3q$. Ако $x=3p\pm 1$, тогаш $x^2\equiv 1 \pmod 3$, па мора да е $y^2\equiv -1 \pmod 3$, што не е можно. Значи, ако монетата се поместува од полето (p_1,q_1) на полето (p_2,q_2) тогаш $p_1-p_2\equiv q_1-q_2 \pmod 3$. Но, како $19-0\not\equiv 0-0 \pmod 3$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

b) Може. Бидејќи $r=73=8^2+3^2$ секој чекор е од видот $(x_1,y_1)\to(x_1\pm 8, y_1\pm 3)$ или од видот $(x_1,y_1)\to(x_1\pm 3, y_1\pm 8)$. Едно решение е дадено на цртежот десно.



c) Не е можно. Ќе докажеме дека бројот на поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm 4, y+9)$ е еднаков на бројот на поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm 4, y-9)$.

Ако ова не е точно, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека имаме повеќе поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm4,y+9)$, „качувања“ за 9.

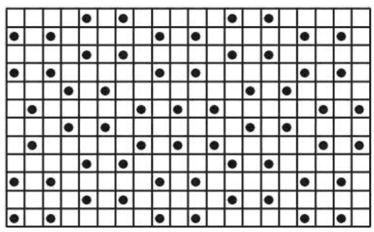
За да точката остане на $x-$оската, овој вишок на качувања може да се компензира со „симнувања“ за 4 и притоа $y-$положбата на паричката се менува за 1 по модул 4. Затоа, за да остане на $x-$оската вишокот на движења од облик $(x\pm4,y+9)$, во однос на движењата $(x\pm4,y-9)$ мора да е делив со 4, и при секое од нив почетната $y-$положба на монетата е различна по модул 4. Но, бидејќи не постои положба на таблата (x,y), каде $y\equiv3(\bmod 4)$ и качување за 9 е можно, добиваме дека тврдењето е точно, т.е. бројот на движењата од облик $(x,y)\to(x\pm4,y+9)$ е еднаков на бројот на движењата од облик $(x,y)\to(x\pm4,y-9)$. Оттука следува и дека:

колку што има движења од облик $(x,y)\to(x\pm9,y+4)$, *толку има движења од облик* $(x,y)\to(x\pm9,y-4)$.

Значи, секогаш имаме парен број на поместувања од двата вида, што значи по $x-$оската секогаш се движиме за парно растојание, па како растојанието од $A_1(0,0)$ до $B_1(19,0)$ е 19, заклучуваме дека целта не може да се постигне.

***Забелешка* 1.** Во делот на задачата под *c)* всушност е докажано дека при димензии на таблата $12\times2n$ целта не може да се постигне, а истото го докажавме и во делот од задачата *a) i)*.

***Забелешка* 2.** На десниот цртеж се прикажани сите полиња кои може да се достигнат во делот од задачата под *c)*.



2. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што

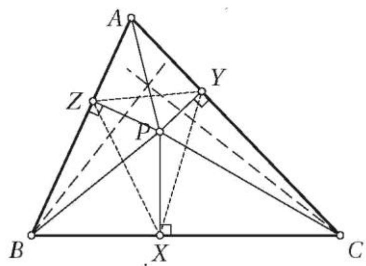
$$\measuredangle BPA-\measuredangle BCA=\measuredangle APC-\measuredangle ABC.$$

Точките D и E се центри на кружниците впишани во триаголниците APB и APC, соодветно. Докажи, дека правите AP, BD и CE се сечат во иста точка.

Решение. *Прв начин.* Нека подножјата на нормалите спуштени од точката P до BC, CA и AB се X, Y и Z, соодветно (цртеж десно). Од тетивните четириаголници $AZPY$, $BXPZ$ и $CYPX$ заклучуваме дека

i) $\overline{YZ}=\overline{PA}\sin A$, и

ii) $\measuredangle YXP=\measuredangle BPC-\measuredangle A$.



Нека $BD \cap AP = \{Q\}$ и $CE \cap AP = \{R\}$. Бидејќи BD и CE се симетрали на аглите $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ соодветно, добиваме $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$ и $\frac{\overline{AR}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$. Затоа за да докажеме дека Q и R се совпаѓаат, доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$.

Сега од *i)* добиваме

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CP} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{CP} \sin C = \overline{BP} \sin B \Leftrightarrow \overline{XY} = \overline{XZ}.$$

Бидејќи $\measuredangle APB - \measuredangle C = \measuredangle APC - \measuredangle B$ од *ii*) добиваме дека $\measuredangle XZY = \measuredangle XYZ$, па затоа $\overline{XY} = \overline{XZ}$, а тоа повлекува $\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$.

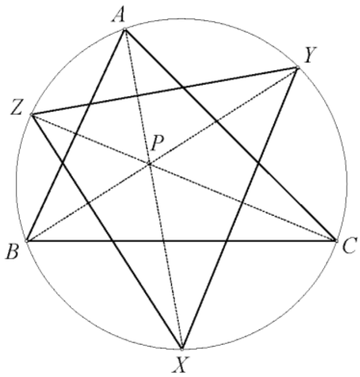
Втор начин. Доволно е да се докаже дека симетралите на $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ се сечат на отсечката AP. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и правите AP, BP и CP ја сечат k во точките X, Y и Z, соодветно (цртеж десно). Условот

$$\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$$

е еквивалентен со условот

$$\measuredangle PAC + \measuredangle PBC = \measuredangle PAB + \measuredangle PCB$$

од каде што со разгледување на периферните агли се добива



$$\measuredangle XZY = \measuredangle XYZ \text{ и } \overline{XZ} = \overline{XY}.$$

Исто така $\triangle BPC \sim \triangle ZPY$, (еднакви агли), па затоа $\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PY}}$. Нека $\overline{BP} \cdot \overline{PY} = t$. Тогаш, $\overline{PC} \cdot \overline{ZP} = t = \overline{AP} \cdot \overline{PX}$. Од релацијата

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{BP}}{\frac{t}{\overline{PC}}} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{PC}}{k}$$

добиваме $\overline{ZY} = \frac{k\overline{BC}}{\overline{BP} \cdot \overline{CP}}$. Аналогно добиваме $\overline{XY} = \frac{k\overline{AB}}{\overline{BP} \cdot \overline{AP}}$ и $\overline{XZ} = \frac{k\overline{CA}}{\overline{AP} \cdot \overline{CP}}$. Од $\overline{XY} = \overline{YZ}$ следува дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$. Симетралите на аглите $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ ја делат отсечката AP во еднаков однос, па затоа тие се сечат на AP.

Трет начин. Да разгледаме инверзија $\Psi_{A,r}$. За произволна точка X нека $X' = \Psi_{A,r}(X)$. Тогаш условот на задачата го добива видот

$$\measuredangle B'C'P' = \measuredangle C'B'P', \text{ т.е. } \overline{B'C'} = \overline{C'P'}.$$

Понатаму, од $\overline{B'P'} = \frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AB}} \overline{BP}$ и $\overline{C'P'} = \frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AC}} \overline{CP}$, со замена во равенството $\overline{B'C'} = \overline{C'P'}$ добиваме $\frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AB}} \overline{BP} = \frac{r^2}{\overline{AP} \cdot \overline{AC}} \overline{CP}$, односно $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$.

3. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ такви што

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n),\ \text{за секои } m, n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. За $m=n=0$ добиваме $f(0)=0$. Ако ставиме $m=0$, n произволен добиваме $f(f(n))=f(n)$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Нултата функција е тривијално решение. Затоа да претпоставиме дека $f \not\equiv 0$. Затоа дадената равенка е еквивалентна со $f(m+f(n))=f(m)+f(n)$, $f(0)=0$. Нека сега дефинираме функција g со $g(n)=f(n)-n$ за $n \in \mathbb{N}_0$. Функцијата g ги има својствата

1^o $g(0)=0$

2^o $g(f(n))=0$, за секое $n \in \mathbb{N}_0$

3^o g е периодична функција, т.е. $g(m+f(n))=g(m)$ за секои $m,n \in \mathbb{N}_0$

Својствата 1^o и 2^o се очигледни и

$$\begin{aligned} g(m+f(n)) &= f(m+f(n)) - m - f(n) \\ &= f(m)+f(n)-m-f(n) \\ &= f(m)-m = g(m) \end{aligned}$$

од каде следува 3^o.

Можни се два случаја, и тоа:

а) g е идентички еднаква на нула, и тогаш $f(n)=n$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) g не е идентички еднаква на нула. Нека k е најмалиот од броевите $f(1), f(2),\dots$. Ќе докажеме дека k е најмалиот број таков што $g(k)=0$ за $k>0$. Навистина, ако $0<u<k$, добиваме $u=f(u)<k$ што противречи на изборот на k. Освен тоа k е број од облик $f(t)$ за некој t, па k е најмал период на функцијата g. Нека $0<i<k$. Бидејќи $g(f(i))=0$ следува дека $f(i)=kn_i$ за некој природен број i. Бидејќи k е период, за g добиваме

$$g(rk+s)=g(s),\ \text{за } 0 \le s < k,$$

што значи

$$f(rk+s)-kr-s = f(s)-s,\ \text{т.е. } f(rk+s)=kr+f(s)=k(r+n_s).$$

Ако $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ се произволни природни броеви или се еднакви на нула, ќе покажеме дека оваа функција f го задоволува условот на задачата. Навистина, нека $m=kp+s$ и $n=kq+t$ каде $0 \le s,t < k$. Тогаш

$$\begin{aligned} f(m+f(n)) &= f(kp+s+k(q+n_t)) = f(k(p+q+n_t)+s) \\ &= k(p+q+n_t+n_s) = k(p+n_s)+k(q+n_t) \\ &= f(m)+f(n) \end{aligned}$$

Втор начин. За $m=n=0$ добиваме $f(0)=0$. Ако ставиме $m=0, n$ произволен добиваме $f(f(n))=f(n)$, за секој $n\in\mathbb{N}_0$.
Нултата функција е тривијално решение. Затоа да претпоставиме дека $f\not\equiv 0$. Го разгледуваме најмалиот $a\in\mathbb{N}$ за кој $f(a)=a$ (таков a постои бидејќи $f(f(n))=f(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$). Од (1) со индукција лесно се докажува дека $f(ka)=ka$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Уште повеќе, бидејќи

$$f(ka+i)=f(i+f(ka))=f(f(i))+f(ka)=ka+f(i)\neq ka+i, \text{ за } 0<i<a,$$

заклучуваме дека равенството $f(n)=n$ важи ако и само ако $a\,|\,n$. Покрај тоа $a\,|\,f(n)$ за $n\in\mathbb{N}$. Ако сега земеме $f(i)=an_i$, за $i=0,1,2,...,a-1$ (при што $n_0=0$ и $n_i\in\mathbb{N}$ за $1\le i<a$) добиваме

$$f(n)=(k+n_i)a, \text{ каде } n=ka+i \text{ и } 0\le i<a.$$

Освен нултата функција и овие функции се решение на (1), што се докажува како при првиот начин на решавање на задачата.

4. Природните броеви a и b се такви што броевите $15a+16b$ и $16a-15b$ се точни квадрати на природни броеви. Определи ја најмалата можна вредност која што може да ја прими помалиот од овие два квадрати.

Решение. *Прв начин*. Нека $15a+16b=r^2$ и $16a-15b=s^2$, $r,s\in\mathbb{N}$. Од овде наоѓаме

$$a=\tfrac{15r^2+16s^2}{481} \text{ и } b=\tfrac{16r^2-15s^2}{481},$$

т.е.

$$a+b=\tfrac{31r^2+s^2}{481}\in\mathbb{N} \quad\text{и}\quad a-b=\tfrac{31s^2-r^2}{481}\in\mathbb{Z}$$

па затоа важи:

(i) $481\,|\,31r^2+s^2$, и

(ii) $481\,|\,31s^2-r^2$.

Забележуваме дека (i) и (ii) се еквивалентни. Навистина,

$$31(31s^2-r^2)+(31r^2+s^2)=2\cdot 481s^2\equiv 0(\operatorname{mod}481)$$

и од NZD(31,481)=1 следува $481\,|\,31s^2-r^2 \Leftrightarrow 481\,|\,31r^2+s^2$. Потоа (i) е еквивалентно со

(i') $31r^2\equiv -s^2(\operatorname{mod}13)$, и (ii') $31r^2\equiv -s^2(\operatorname{mod}37)$

бидејќи $481=13\cdot 37$.

Ќе докажеме дека (i') е можно само ако $r\equiv s\equiv 0(\operatorname{mod}13)$. Навистина, ако еден од броевите r и s е делив со 13 тогаш мора и вториот да е делив со 13. Да претпоставиме дека $13\nmid r$ и $13\nmid s$. Од (i') добиваме

$$5r^2 \equiv -s^2 (\mathrm{mod}\,13),\quad 25r^4 \equiv s^4 (\mathrm{mod}\,13),\quad -r^4 \equiv s^4 (\mathrm{mod}\,13),\quad -r^{12} \equiv s^{12} (\mathrm{mod}\,13)$$

што не е можно бидејќи од малата теорема на Ферма следува $r^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$ и $s^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$. Значи, од (i') следува $r \equiv s \equiv 0(\mathrm{mod}\,13)$.

Аналогно се докажува дека од (ii') следува $r \equiv s \equiv 0(\mathrm{mod}\,37)$. Значи, (i) е можно само ако $481 | r$ и $481 | s$, па $r \geq 481$ и $s \geq 481$. Но, за $r = 481$ и $s = 481$ броевите $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$ се природни, па затоа одговорот на задачата е 481^2.

Втор начин. Да означиме $15a + 16b = x^2$ и $16a - 15b = y^2$, каде $x, y \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$x^4 + y^4 = (1a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Според тоа, $481 = 13 \cdot 37 \,|\, x^4 + y^4$. Од друга страна, познато е следново тврдење:

Лема. Ако $p > 2$ е прост број и $x, y \in \mathbb{Z}$ се такви што $p \,|\, x^4 + y^4$ и $p \nmid xy$, тогаш $8 \,|\, p - 1$.

Доказ. Нека $y_1 \in \mathbb{Z}$ е таков што $yy_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Тогаш $p \,|\, (xy_1)^4 + 1 \,|\, (xy_1)^8 - 1$, што значи дека редот на бројот xy_1 по модул p е 8. Оттука следува дека $8 \,|\, p - 1$. ■

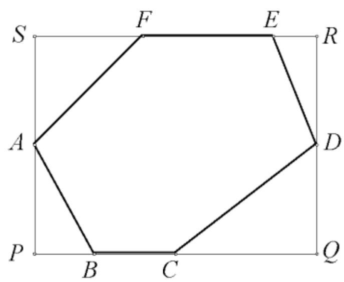
Бидејќи $13 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ и $37 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, следува дека x и y се деливи и со 13 и со 37, па затоа $481 \,|\, x, y$. Од друга страна $x = y = 481$ се достигнува за $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$, па затоа одговорот на задачата е 481^2.

5. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник таков што AB е паралелна со DE, BC е паралелна со FE и CD е паралелна со AF. Нека R_A, R_B и R_C се радиусите на кружниците опишани околу триаголниците ABF, BCD и DEF соодветно и p е периметар на шестаголникот. Докажи дека

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{p}{2}.$$

Решение. *Прв начин*. Нека $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$, $\overline{DE} = t$, $\overline{EF} = u$ и $\overline{FA} = v$. Забележуваме дека

$$\measuredangle A = \measuredangle D,\ \measuredangle B = \measuredangle E \text{ и } \measuredangle C = \measuredangle F.$$



Нека точките P, Q, R и S се такви што P и Q лежат на правата определена со B и C, S и R лежат на правата определена со

F и E и при тоа

$$\measuredangle ASF = \measuredangle APB = \measuredangle AQC = \measuredangle DRE = 90^\circ .$$

Тогаш

$$\overline{AP} = x\sin\measuredangle B,\ \overline{AS} = v\sin\measuredangle C,$$
$$\overline{DQ} = z\sin\measuredangle C,\ \overline{DR} = t\sin\measuredangle B.$$

Од овде добиваме

$$\begin{aligned}2\overline{BF} &\geq \overline{AP} + \overline{AS} + \overline{DQ} + \overline{DR} \\ &= x\sin\measuredangle B + v\sin\measuredangle C + z\sin\measuredangle C + t\sin\measuredangle B\end{aligned}.$$

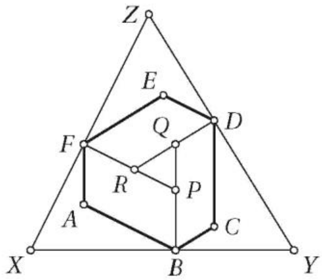
Аналогно се докажуваат и следните две неравенства:

$$2\overline{DB} \geq z\sin\measuredangle A + y\sin\measuredangle B + u\sin\measuredangle B + v\sin\measuredangle A$$
$$2\overline{FD} \geq u\sin\measuredangle C + t\sin\measuredangle A + x\sin\measuredangle A + y\sin\measuredangle C$$

За радиусите R_A, R_C и R_E на опишаните кружници околу триаголниците FAB, BCD и DEF важи $R_A = \frac{\overline{BF}}{2\sin\measuredangle A}$, $R_C = \frac{\overline{DB}}{2\sin\measuredangle C}$ и $R_E = \frac{\overline{FD}}{2\sin\measuredangle B}$, односно

$$\begin{aligned}R_A + R_C + R_E &\geq \tfrac{1}{4}x\left(\tfrac{\sin\measuredangle B}{\sin\measuredangle A} + \tfrac{\sin\measuredangle A}{\sin\measuredangle B}\right) + \tfrac{1}{4}y\left(\tfrac{\sin\measuredangle B}{\sin\measuredangle C} + \tfrac{\sin\measuredangle C}{\sin\measuredangle B}\right) + \ldots \\ &= \tfrac{2x}{4} + \tfrac{2y}{4} + \ldots + \tfrac{2v}{4} = \tfrac{x+y+\ldots+v}{2} = \tfrac{p}{2}.\end{aligned}$$

Втор начин. Нека точките P, Q и R се такви што четириаголниците $FABP, BCDQ$ и $DEFR$ се паралелограми, а точките точките X, Y, Z се такви што правите XY, YZ, ZX редоследно минуваат низ B, D, F и се нормални на правите BP, DQ, FR (цртеж десно). Бидејќи



$$2R_A = \overline{PX}, 2R_C = \overline{QY} \text{ и } 2R_E = \overline{RZ},$$

треба да докажеме дека

$$\overline{PX} + \overline{QY} + \overline{RZ} \geq \overline{PF} + \overline{PB} + \overline{QB} + \overline{QD} + \overline{RD} + \overline{RE}. \tag{1}$$

Да означиме $\overline{YZ} = x, \overline{ZX} = y$ и $\overline{XY} = z$. Нека Y_x и Z_x се соодветно точките симетрични на точките Y и Z во однос на симетралата на $\measuredangle ZXY$. Тогаш

$$\begin{aligned}y\cdot\overline{PB} + z\cdot\overline{PF} &= \overline{XZ_x}\cdot\overline{PB} + \overline{XY_x}\cdot\overline{PF} = 2P_{XZ_xP} + 2P_{XY_xP} \\ &= 2P_{XY_xPZ_x} \leq \overline{Y_xZ_x}\cdot\overline{PX} = x\cdot\overline{PX},\end{aligned}$$

па добиваме

$$\tfrac{y}{x}\cdot\overline{PB} + \tfrac{z}{x}\cdot\overline{PF} \leq \overline{PX}. \tag{2}$$

Со P', Q', R' да ги означиме средините на отсечките QR, RP, PQ, соодветно. Ако го собереме (2) со аналогните равенства за QY и RZ добиваме

$$\overline{PX}+\overline{QY}+\overline{RZ}\geq(\tfrac{y}{x}\cdot\overline{PB}+\tfrac{x}{y}\cdot\overline{QB})+(\tfrac{z}{y}\cdot\overline{QD}+\tfrac{y}{z}\cdot\overline{RD})+(\tfrac{x}{z}\cdot\overline{RF}+\tfrac{z}{x}\cdot\overline{PF})$$
$$=(\tfrac{y}{x}+\tfrac{x}{y})\cdot\overline{R'B}+(\tfrac{z}{y}+\tfrac{y}{z})\cdot\overline{P'D}+(\tfrac{x}{z}+\tfrac{z}{x})\cdot\overline{Q'F}+\tfrac{1}{2}\delta$$

каде $\delta=(\tfrac{x}{y}-\tfrac{y}{x})\cdot\overline{PQ}+(\tfrac{y}{z}-\tfrac{z}{y})\cdot\overline{QR}+(\tfrac{z}{x}-\tfrac{x}{z})\cdot\overline{RP}$. Понатаму, триаголниците PQR и XYZ се слични, па затоа $\frac{\overline{QR}}{\overline{\overline{YZ}}}=\frac{\overline{RP}}{\overline{\overline{ZX}}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{\overline{XY}}}=k$, па е

$$\delta=k(\tfrac{x}{y}-\tfrac{y}{x})z+k(\tfrac{y}{z}-\tfrac{z}{y})x+k(\tfrac{z}{x}-\tfrac{x}{z})y=0\,.$$

Сега (1) следува од (3) и неравенствата $\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{x}\geq 2,\ \tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{y}\geq 2,\ \tfrac{z}{x}+\tfrac{x}{z}\geq 2$.

6. Нека $n,p,q\in\mathbb{N}$ се такви што $n>p+q$ и $x_0,x_1,\ldots,x_n$ се цели броеви кои ги задоволуваат условите:

(a) $x_0=x_n$

(b) за секој природен број i, $1\leq i\leq n$ важи или $x_i-x_{i-1}=p$ или $x_i-x_{i-1}=-q$.

Докажи дека постои пар на индекси (i,j) таков што $i<j$, $(i,j)\neq(0,n)$ и $x_i=x_j$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека p и q се заемно прости броеви, бидејќи ако $\text{NZD}(a,b)=d>1$, тогаш може да го примениме решението на задачата за $p'=\frac{p}{d}$, $q'=\frac{q}{d}$ и $x_i'=\frac{x_i}{d}$.

Нека бројот на индексите $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ такви што $x_i-x_{i-1}=p$ биде еднаков на k. Тогаш бројот на индексите $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ за кои $x_i-x_{i-1}=-q$ е еднаков на $n-k$. Бидејќи $x_n=x_0=0$ добиваме дека $kp=(n-k)q$, па затоа $k=aq$ и $n-k=ap$ за некој природен број a. Значи $n=a(p+q)$, каде $a>1$ бидејќи $n>p+q$.

Нека $y_i=x_{i+p+q}-x_i$ за $i\in\{0,1,\ldots,n-p-q\}$. Бидејќи $n>p+q$, постојат барем два такви броја y_i. Ќе покажеме дека барем еден од овие броеви y_i е нула и со тоа задачата ќе биде решена. Нека $S_i=\{i+1,i+2,\ldots,i+p+q\}$ и нека r е бројот на сите индекси $j\in S_i$ за кои $x_j-x_{j-1}=p$. Тогаш бројот на сите $j\in S_i$ за кои $x_j-x_{j-1}=-q$ е $p+q-r$. Собирајќи ги овие равенства за сите $j\in S_i$, добиваме

$$y_i=rp-(p+q-r)q=(p+q)(r-q)\,.$$

Значи за секое i важи $p+q\mid y_i$. Да ја разгледаме разликата

$$y_{i+1}-y_i=(x_{i+p+q+1}-x_{i+1})-(x_{i+p+q}-x_i)=(x_{i+p+q+1}-x_{i+p+q})-(x_{i+1}-x_i)\,.$$

Секој од броевите во заградата е p или $-q$, па затоа

$$y_{i+1}-y_i\in\{0,p+q,-(p+q)\}\,.$$

Да го разгледаме сега равенството

$$y_0+y_{p+q}+y_{2(p+q)}+...+y_{n-p-q}=0\,.$$

Тоа покажува дека броевите y_i не може да се сите позитивни или сите негативни. Значи, во низата $y_0,y_1,...,y_{n-p-q}$ постојат два броја кои имаат спротивни знаци. Бидејќи секое y_i се дели со $p+q$ и разликата меѓу два соседни броја е 0 или $\pm(p+q)$, добиваме дека некој од тие два броја мора да е еднаков на нула.