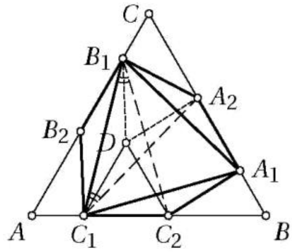
XLVI олимпијада

1. На страните на рамностран триаголник ABC избрани се шест точки: A_1, A_2 на BC; B_1, B_2 на AC и C_1, C_2 на AB. Овие точки се темиња на конвексен шестаголник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чии страни имаат еднакви должини. Докажи, дека правите A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.

Решение. Нека D е точката во внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\triangle C_1C_2D$ е рамностран. Тогаш DC_1 е паралелна и еднаква со B_1B_2, па затоа $B_1B_2C_1D$ е ромб и оттука $\overline{DB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_2B_1}$. Аналогно $\overline{DA_2} = \overline{A_2B_1}$, што значи дека $\triangle DA_2B_1$ е рамностран. Значи, точките A_2, B_1, C_1, C_2 лежат на кружница со центар D, па затоа



$$\measuredangle B_1C_1A_2 = \measuredangle C_1B_1C_2 = \frac{1}{2}\measuredangle C_1DC_2 = 30^\circ.$$

Слично,

$$\measuredangle C_1A_1B_2 = \measuredangle A_1C_1A_2 = \measuredangle A_1B_1C_2 = \measuredangle B_1A_1B_2 = 30^\circ.$$

Од досега изнесеното следува дека $\triangle A_1B_1C_1$ е рамностран и дека A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се симетрали на неговите страни, што значи дека тие се сечат во неговиот центар.

2. Нека $a_1, a_2, ...$ е низа цели броеви, која содржи бесконечно многу како позитивни така и негативни броеви. Познато е дека за секој природен број n броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ даваат различни остатоци при делење со n. Докажи, дека во оваа низа секој цел број се појавува точно по еднаш.

Решение. Од условот на задачата следува дека сите членови на низата се различни. Навистина, ако $a_i = a_j$ за $i < j$, тогаш броевите $a_1, a_2, ..., a_j$ не може да даваат различни остатоци при делење со j.

Нека $|a_1 - a_2| = t > 1$ и да ги разгледаме остатоците од делењето на $a_1, a_2, ...,$ a_t со t. Бидејќи $|a_1 - a_2| = t$, добиваме дека a_1 и a_2 даваат еднакви остатоци при делење со t, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $|a_1 - a_2| = 1$. Ако $|a_3 - a_i| = t > 2$ за $i = 2$ или $i = 3$ ќе добиеме дека a_3 и a_1, или a_3 и a_2 даваат исти остатоци при делење со t, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $|a_3 - a_i| = 1$ или 2, што значи дека броевите a_1, a_2 и a_3 се последователни цели броеви (не задолжително во овој редослед).

Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се последователни цели броеви. Ако постои $i = 1, 2, ..., n$ за кој важи $|a_{n+1} - a_i| = t \geq n+1$, тогаш при делење на броевите $a_1, a_2, ..., a_t$ со t има два еднакви остатоци (на a_{n+1} и a_i). Според тоа, за секој $i = 1, 2, ..., n$ имаме $|a_{n+1} - a_i| < n+1$. Бидејќи $a_1, a_2, ..., a_n$ се во некој редослед последователни цели броеви, заклучуваме дека последните равенства се можни ако и само ако $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ се во некој редослед последователни цели броеви. Според тоа, за секој n броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ во некој редослед се блок од последователни цели броеви.
Нека x е произволен цел број. Бидејќи во низата има бесконечно многу позитивни и бесконечно многу негативни членови, заклучуваме дека постојат i и j такви што $a_i < x$ и $a \; > x$. Но, тогаш броевите $a_1, a_2, ..., a_m$, за $m = \max\{i, j\}$ се последователни цели броеви од каде што следува дека со a_i и a_j тој блок ги содржи сите броеви меѓу нив. Сега од произволноста на x следува дека секој цел број се сретнува точно еднаш како член на низата.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz \geq 1$. Докажи дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0 . \tag{1}$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $xyz \geq 1$ следува

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 ,$$

т.е.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} .$$

Ако го собереме ова неравенства со аналогните неравенства за $\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}$ и $\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}$, го добиваме неравенството

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \leq 3$$

кое е еквивалентно со неравенство (1).
Втор начин. При вообичаената ознака

$$T_{a,b,c} = x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c + x^a z^b y^c + z^a y^b x^c + y^a x^b z^c ,$$

после сведувањето на заеднички именител неравенството (1) се сведува на неравенството

$$T_{5,5,5} + 4T_{7,5,0} + T_{9,0,0} + T_{5,2,2} \geq T_{5,2,2} + 2T_{5,4,0} + T_{6,0,0} + 2T_{4,2,0} + T_{2,2,2} . \tag{2}$$

Од неравенствата на Шур и Мјурхед и условот $xyz \geq 1$ следуваат нерaвенствата

$$T_{9,0,0}+T_{5,2,2}\ge 2T_{7,2,0}\ge 2T_{7,1,1}\ge 2T_{6,0,0}\ge T_{6,0,0}+T_{4,2,0},\quad T_{7,5,0}\ge T_{5,5,2}$$

$$2T_{7,5,0}\ge 2T_{6,5,1}\ge 2T_{5,4,0},\quad T_{7,5,0}\ge T_{6,4,2}\ge T_{4,2,2},\quad T_{5,5,5}\ge T_{2,2,2}.$$

Конечно, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (2).

Трет начин. Неравенството

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}$$

е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\ge 0,$$

кое очигледно е точно. Според тоа,

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}&\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}\\&\ge\frac{x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy}{x^2+y^2+z^2}\\&=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2}\ge 0.\end{aligned}$$

4. Низата $a_1,a_2,...$ е определена со

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1,\quad (n=1,2,...).$$

Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

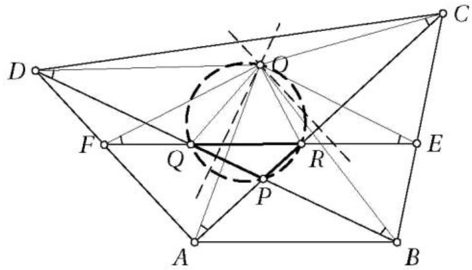
Решение. Ќе докажеме дека за секој прост број p постои m таков што $p\,|\,a_m$. За $p\in\{2,3\}$ имаме $p\,|\,a_2=48$. Од друга страна, ако $p>3$, тогаш од малата теорема на Ферма следува дека

$$6a_{p-2}=3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1}-6\equiv 3+2+1-6=0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

т.е. $p\,|\,a_{p-2}$, со што доказот е завршен.

Според тоа, единствен природен број со саканото својство е бројот 1.

5. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кај кој должините на страните BC и AD се еднакви и страните BC и AD не се паралелни. Нека E и F се внатрешни точки на страните BC и AD соодветно при што важи $\overline{BE}=\overline{DF}$. Правите AC и BD се сечат во P, правите BD и EF се сечат во Q, а правите EF и AC се сечат во R. Ги разгледуваме триаголниците PQR кои се добиваат за сите вакви точки E и F. Докажи, дека опишаните кружници на сите овие триаголници имаат заедничка точка различна од P.



Решение. *Прв начин*. Со O да го означиме пресекот на симетралите на отсечките AC и BD. Точките $D,\ F, A$ при ротација околу точката O за агол $\omega = \measuredangle DOB$ се пресликуваат во точките B, E, C, соодветно. Според тоа, $\overline{OE} = \overline{OF}$ и

$$\measuredangle OFE = \measuredangle OAC = 90^\circ - \tfrac{\omega}{2},$$

па затоа точките F, A, R, O се конциклични и $\measuredangle ORP = 180^\circ - \measuredangle OFA$. Слично, точките E, B, Q, O се конциклични и

$$\measuredangle OQP = 180^\circ - \measuredangle OEB = \measuredangle OEC = \measuredangle OFA.$$

Сега важи $\measuredangle ORP = 180^\circ - \measuredangle OQP$, т.е. точката O лежи на опишаната кружница околу $\triangle PQR$ и тоа е бараната точка.

Втор начин. Со O да го означиме пресекот на симетралите на отсечките AC и BD. Ќе докажеме дека O е бараната точка, т.е. дека кога E и F се менуваат, тогаш опишаните кружници околу триаголниците PQR минуваат низ O. За таа цел доволно е да докажеме дека четириаголникот $PQOR$ е тетивен. Од $\overline{OB} = \overline{OD}$, $\overline{OC} = \overline{OA}$ и $\overline{BC} = \overline{AD}$ следува дека $\triangle OBC \cong \triangle ODA$. Затоа $\measuredangle BOC = \measuredangle DOA$, од каде следува $\measuredangle BOD = \measuredangle AOC$. Бидејќи $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$ се рамнокраки со еднакви агли при врвовите, тие се слични. Освен тоа, од $\overline{OB} = \overline{OD}$, $\overline{BE} = \overline{DF}$ и $\measuredangle OBE = \measuredangle ODF$ следува $\triangle OBE \cong \triangle ODF$, па затоа $\overline{OE} = \overline{OF}$ и $\measuredangle EOF = \measuredangle BOD$. Според тоа, $\triangle EOF$ е сличен на $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$, па затоа $\measuredangle OEQ = \measuredangle OBQ = \measuredangle OCR$. Од овие равенства следува дека четириаголниците $OBEQ$ и $OECR$ се тетивни. Затоа

$$\measuredangle OQB = \measuredangle OEB = \measuredangle ORC = \measuredangle ORP,$$

што значи дека четириаголникот $PQOR$ е тетивен.

6. На еден математички натпревар учениците решавале 6 задачи. Се покажало дека секој пар задачи бил решен од повеќе од $\frac{2}{5}$ од учениците и дека не постои ученик кој ги решил сите 6 задачи. Докажи, дека постојат најмалку два ученика такви што секој од нив решил точно 5 задачи.

Решение. *Прв начин*. Нека имало n ученици, од кои a_i решиле точно i задачи, што значи дека $a_0 + ... + a_5 = n$. Ќе го определиме бројот N на парови (C, P), каде C е ученик кој го решил парот задачи P. Секој од 15-те парови задачи го решиле барем $\frac{2n+1}{5}$ ученици, па затоа $N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3$. Од друга страна, a_i ученици решиле $\frac{i(i-1)}{2}$ парови, па затоа

$$\begin{aligned} 6n+3 \leq N &\leq a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 \\ &= 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0) \\ &\leq 6n+4. \end{aligned}$$

Според тоа, $a_5 \geq 1$.

Да претпоставиме дека $a_5 = 1$. Тогаш мора да важи $N = 6n+4$, што е можно само ако 14 парови задачи решиле точно $\frac{2n+1}{5}$ ученици, а преостанатиот пар (да го наречеме *посебен*) $\frac{2n+1}{5}+1$ ученици. Притоа $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, т.е. победникот решил 5 задачи (да кажеме дека не ја решил задачата *t*), а сите останати решиле по 4 задачи.

Сега да го определиме бројот M_p на парови (C,P) во кои *P* содржи дадена задача *p*. Нека b_p е бројот на учениците кои ја решиле *p*. Тогаш $M_t = 3b_t$ (секој од b_t ученици решил три пара задачи кои ја содржат *t*) и $M_p = 3b_p + 1$ за $p \neq t$ (победникот решил четири такви пара). Од друга страна, секој од петте парови кои ја вклучуваат *p* го решиле $\frac{2n+1}{5}$ или $\frac{2n+1}{5}+1$ ученици, па затоа $M_p = 2n+2$ ако посебниот пар ја содржи *p*, односно $M_p = 2n+1$ во спротивно. Значи $M_t = 3b_t = 2n+1$ или $2n+2$, па затоа $2n+1 \equiv 0$ или $2 \pmod 3$. Но, ако $p \neq t$ е задача која не е во посебниот пар, имаме $M_p = 3b_p + 1 = 2n+1$, па е $2n+1 \equiv 1 \pmod 3$, што е контрадикција.

Втор начин. Од условот на задачата следува дека секои две задачи ги решиле најмалку $\frac{2n+1}{5}$ ученици, каде n е вкупниот број ученици. Да претпоставиме дека најмногу еден ученик решил 5 задачи. Тогаш секој од останатите ученици решил најмногу по 4 задачи. Да ги преброиме тројките (i, j, A), каде i и j се броеви на различни задачи, а A е ученик кој ги решил задачите i и j. Ако $a_1, a_2, ..., a_n$ ги означуваат задачите, решени од соодветниот ученик, тогаш за бројот на овие тројки имаме:

$$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + ... + \binom{a_n}{2} \leq \binom{5}{2} + (n-1)\binom{4}{2} = 6n+4.$$

Од друга страна, овој број не е помал од $\binom{6}{2} \cdot \frac{2n+1}{5}$. Според тоа,

$$15 \cdot \left(\left[\frac{2n}{5}\right]+1\right) \leq 6n+4. \qquad (1)$$

Нека $n = 5k + l$ за $l = 0,1,2,3,4$.

- Ако $l=0$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k$ и неравенството (1) е $30k+15\leq 30k+4$.
- Ако $l=1$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k$ и неравенството (1) е $30k+15\leq 30k+10$.
- Ако $l=2$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k$ и неравенството (1) е $30k+15\leq 30k+16$.
- Ако $l=3$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k+1$ и неравенството (1) е $30k+30\leq 30k+22$.
- Ако $l=4$, тогаш $[\frac{2n}{5}]=2k+1$ и неравенството (1) е $30k+30\leq 30k+28$.

Во сите случаи освен за $n=5k+2$ добиваме противречност. Да разгледаме комплетен граф со 6 темиња A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 кои соодветствуваат на шесте задачи. На реброто кое ги поврзува задачите i и j да го запишеме бројот a_{ij} еднаков на бројот на учениците кои ги решиле задачите i и j. Од (1) следува дека 14 од овие броеви се еднакви на $2k+1$, а петнаесеттиот е еднаков на $2k+2$. Од (1) следува дека четиринаесет од овие броеви се еднакви на $2k+1$, а петнаесеттиот е еднаков на $2k+2$. Да ставиме $t=2k+1$ и без ограничување на општоста да земеме $a_{12}=2k+2$.

Да избереме задача A_i, која е решена од ученикот кој решил 5 задачи и не е A_1 или A_2. Секој ученик кој заедно со таа задача решил уште 3 задачи додава на збирот на броевите, запишани на ребрата, кои излегуваат од A_i, точно 3 единици. Ученикот кој решил точно 5 задачи, додава на тој збир 4 единици. Според тоа, $3s+4=5t$, од каде следува дека $5t\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

Сега да ја избереме задачата A_j која не е решена од ученикот кој решил 5 задачи. Нека таа задача е решена од p ученици.

1) Ако $A_j\neq A_1$ и $A_j\neq A_2$, како погоре имаме $3p=5t$, што противречи на $5t\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.
2) Ако $A_j=A_1$, тогаш $3p=5x+1$, што противречи на $5t\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

Од добиената противречност следува дека има барем два ученика кои решиле по 5 задачи.