Самоил Малчески, Скопје
Марија Поповска, Охрид

ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД – 2

Оваа статија е продолжение на статијата [6], во која се осврнавме на неколку методи за решавање на Диофантови равенки од повисок ред. Во оваа статија, преку примери, ќе разгледаме уште две постапки за решавање на Диофантови равенки од повисок ред.

Во следните неколку задачи најпрво ќе покажеме како неравенствата може да се употребат при решавање на некои Диофантови равенки.

Задача 1. Определи ги сите четирицифрени броеви кои се еднакви на четвртиот степен на збирот на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број кој го задоволува условот на задачата., т.е. $\overline{abcd}=(a+b+c+d)^4$. Од

$$5^4<1000\leq\overline{abcd}=(a+b+c+d)^4<10000=10^4,$$

заклучуваме $5<a+b+c+d<10$. Според тоа, $a+b+c+d=6,7,8$ или 9. Од $6^4=1296$, $7^4=2401$, $8^4=4096$ и $9^4=6561$ е јасно дека единствено решение на задачата е бројот 2401. ■

Задача 2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b+c-1}+\frac{1}{c+a-1}+\frac{1}{a+b-1}.$$

Решение. Имаме $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{a+b-1}$ при што знак за равенство важи ако и само ако $b=1$, $\frac{1}{b}\geq\frac{1}{b+c-1}$ при што знак за равенство важи ако и само ако $c=1$ и $\frac{1}{c}\geq\frac{1}{c+a-1}$ при што знак за равенство важи ако и само ако $a=1$. Значи, единствено решение на дадената равенка е $a=b=c=1$. ■

Задача 3. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{xy}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $y\leq x$. Тогаш

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}\leq\frac{2}{y}-\frac{1}{xy}=\frac{2x-1}{xy}<\frac{2x}{xy}=\frac{2}{y},$$

па затоа $y<6$. Со непосредна проверка добиваме дека за $y=1$, $y=2$ и $y=3$ равенката нема решение. За $y=4$ добиваме $x=9$, а за $y=5$ добиваме $x=6$. Конечно, заради симетрија добиваме дека решенија на дадената равенка се: $(x,y)\in\{(4,9),(5,6),(6,5),(9,4)\}$. ■

Задача 4. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) за кои важи

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z})=2.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$. Според тоа, важи $2\leq(1+\frac{1}{z})^3$, од каде добиваме $z\leq 3$.

Ако $z=1$, тогаш $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=1$, што не е можно.

Ако $z=2$ имаме $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{4}{3}$. Следува, $\frac{4}{3}\leq(1+\frac{1}{y})^2$, од каде добиваме $y<7$. Бидејќи $1+\frac{1}{x}>1$, добиваме $1+\frac{1}{y}<\frac{4}{3}$, па затоа $y>3$. Ги заменуваме добиените вредности за y и ги наоѓаме решенијата $(7,6,2)$, $(9,5,2)$, $(15,4,2)$.

Ако $z=3$, тогаш $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{3}{2}$. Аналогно како и во претходниот случај добиваме дека $y<5$ и $y\geq z=3$. Така ги добиваме решенијата $(8,3,3)$ и $(5,4,3)$.

Значи, сите решенија на почетната равенка се сите пермутации на подредените тројки $(7,6,2),(9,5,2),(15,4,2),(8,3,3)$ и $(5,4,3)$. ■

Задача 5. Докажи дека ако p е прост број и $n\in\mathbb{N}$, тогаш равенката

$$x(x+1)=p^{2n}y(y+1) \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека p е прост број, $n\in\mathbb{N}$ и $x,y\in\mathbb{N}$ ја задоволуваат равенката (1). Од $(x,x+1)=1$ следува $p^{2n}\mid x$ или $p^{2n}\mid x+1$, па затоа $x+1\geq p^{2n}$. Но, равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$p^{2n}-1=[p^n(2y+1)+(2x+1)][p^n(2y+1)-(2x+1)]. \qquad (1)$$

Левата страна и првиот множител на десната страна на (2) се природни броеви, па затоа и вториот множител на десната страна на (2) мора да е природен број. Оттука следува, дека

$$p^{2n}-1>2x+1, \text{ т.е. } p^{2n}>2x+2.$$

Според тоа,

$$p^{2n}>2(x+1)>2p^{2n},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека равенката (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$. ■

Задача 6. Во множеството прости броеви најди ги сите решенија на равенката

$$1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\frac{1}{pqrs}$$

такви што $p<q<r<s$.

Решение. Ако $p\geq 3$, тогаш $q\geq 5$, $r\geq 7$ и $s\geq 11$, па затоа

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{pqrs}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{1155}$$
$$=\frac{385+231+165+105}{1155}=\frac{886}{1155}<1.$$

Значи, $p=2$. Сега, ако $q\geq 5$, тогаш $r\geq 7$ и $s\geq 11$ и

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{pqrs}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{770}$$
$$=\frac{385+154+110+70}{770}=\frac{719}{770}<1.$$

Значи, $q=3$. Сега равенката го добива видот

$$(r-6)(s-6)=37$$

и како 37 е прост број добиваме

$$r-6=1 \text{ и } s-6=37, \text{ т.е. } r=7 \text{ и } s=43.$$

Конечно, решенија на дадената равенка се

$$p=2, q=3, r=7 \text{ и } s=43. \blacksquare$$

Задача 7. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=y^3.$$

Решение. Имаме

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=8x^3+84x^2+420x+784.$$

Ако $x\geq 0$, тогаш

$$(2x+7)^3<8x^3+84x^2+420x+784<(2x+10)^3,$$

па затоа $y=2x+8$ или $y=2x+9$, но во овие случаи немаме целобројно решение за x. Ако $x<0$, тогаш забележуваме дека ако (x,y) е решение, тогаш и $(-x-7,-y)$ е решение и затоа $-7<x$. Сега, лесно се добива дека решенија на дадената равенка се:

$$(x,y)=(-2,6),(-3,4),-4,-4),(-5,-6)\,. \blacksquare$$

Задача 8 во [6] ја решивме така што Диофантовата равенка ја сведовме на неколку системи од две линеарни равенки со две непознати. Во продолжение на истиот начин ќе решиме уште неколку задачи.

Задача 8. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2-y^2=203\,.$$

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката $x^2-y^2=203$, тогаш и паровите $(-x,y),(x,-y),(-x,-y)$ се исто така решение на равенката. Затоа доволно е да ги определиме само позитивните решенија. Од $203=1\cdot 203=7\cdot 29$ и $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ добиваме

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=203 \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=29 \end{cases} \qquad (2)$$

Решение на системот (1) е $x=102$, $y=101$, а на системот (2) е парот $x=18,\ y=11$. Според тоа решенија на дадената равенка се паровите

$$(102,101),\ (102,-101)\,,(-102,-101)\,,(-102,101)\,,$$
$$(18,11)\,,(-18,11)\,,\ (-18,-11)\ \text{и}\ (18,-11)\,. \blacksquare$$

Задача 9. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$9x^2+11xy+2y^2=2010\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(9x+2y)(x+y)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67\,.$$

Сега, бидејќи за секои природни броеви x и y важи

$$x+y<9x+2y\,,$$

единствена можност е

$$\begin{cases} 9x+2y=67 \\ x+y=30 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x=1, y=29$. $\blacksquare$

Задача 10. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=1.$$

Решение. *Прв начин.* Јасно, $xy\neq 0$. Ако дадената равенка ја помножиме со xy, ја добиваме равенката

$$x+y+2=xy,$$

па како $x\neq 1$, дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$y=1+\frac{3}{x-1}.$$

Според тоа, $\frac{3}{x-1}$ е цел број, па затоа $x-1$ е делител на 3, односно $x-1=-3,-1,1,3$, од каде добиваме $x=-2,0,2,4$, па $y=0,-2,4,2$, соодветно. Но, $xy\neq 0$, па затоа единствени решенија на дадената равенка се $x=2,y=4$ и $x=4,y=2$.

Втор начин. Дадената равенка ќе ја запишеме во видот

$$(x-1)(y-1)=3,$$

од каде ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases}x-1=-3,\\ y-1=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=-1,\\ y-1=-3,\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=3,\\ y-1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=1,\\ y-1=3.\end{cases}$$

Решенија на овие системи се $(x,y)\in\{(-2,0),(0,-2),(4,2),(2,4)\}$, соодветно и како $xy\neq 0$, добиваме дека единствени решенија на дадената равенка се $(x,y)\in\{(4,2),(2,4)\}$. ■

Задач 11. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy-3x+y=5.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+1)(y-3)=2.$$

Според тоа, производот на два цели броја треба да е еднаков на 2, па затоа

$$\begin{cases}x+1=2,\\ y-3=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x+1=1,\\ y-3=2,\end{cases}\quad \begin{cases}x+1=-1,\\ y-3=-2,\end{cases}\quad \begin{cases}x+1=-2,\\ y-3=-1,\end{cases}$$

од каде ги добиваме решенијата

$$(x,y)\in\{(1,4),(0,5),(-2,1),(-3,2)\}.$$ ■

Задача 12. Од точно 2014 еднакви кибритени чкорчиња во рамнината е направен правоаголник, поделен на квадрати со страна едно чкорче. Определи ги димензиите на правоаголникот.

Решение. Ако правоаголникот има m редови и n колони ($1 \le m \le n$), тогаш тој има $m+1$ ред со n хоризонтални чкорчиња и $n+1$ колона со по m вертикални чкорчиња. Затоа $(m+1)n+(n+1)=2014$, т.е.

$$2mn+m+n=2014.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2 и додадеме 1 добиваме

$$4mn+2m+2n+1=4029,$$

$$(2m+1)(2n+1)=3\cdot 17\cdot 79.$$

Од последната равенка ги добиваме системите

$$\begin{cases} 2m+1=3, \\ 2n+1=1343, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m+1=17, \\ 2n+1=237, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m+1=51, \\ 2n+1=79, \end{cases}$$

чии решенија се

$$(m,n)=(1,671),\ (m,n)=(8,118),\ (m,n)=(25,39),$$

соодветно. ■

Задачи за самостојна работа

1. Определи ги сите двоцифрени природни броеви кои се еднакви на збирот на кубот на цифрата на десетките и квадратот на цифрата на единиците.
2. Определи природен број n и прост број p такви што збирот на сите делители на бројот p^4 е еднаков на n^2.
3. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$
4. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=1.$$
5. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1.$$
6. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$$
7. Нека $k \ge 2$. Докажи дека равенката
$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_k^2}=1$$

нема решение такво што $x_1 < x_2 < ... < x_k$.

8. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0.$$
9. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 2.$$
10. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 6y - 5.$$

Литература

1. Аневска, К., Малчески, А. (2021). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, https://matematickitalent.mk
2. Малчески, Р. (2021). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, https://matematickitalent.mk
3. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
4. Малчески, С. (2022). Математички талент 26 – Збирка заадачи по теорија на броеви, (во печат)
5. Попоска, М., Малчески, С. (2021). Диофантови равенки од повисок ред – 1, https://matematickitalent.mk