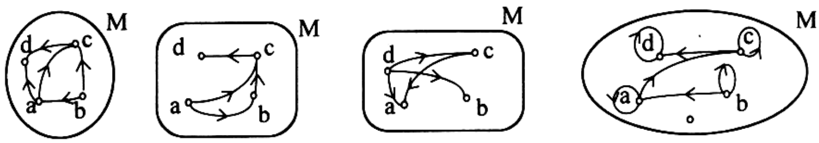
VIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Која од релациите на цртежот е транзитивна? Образложи го одговорот.



а) б) в) г)

2. Над страните на правоаголникот чија должина е за 4 cm поголема од ширината, од надвор конструирани се рамнострани триаголници. Периметарот на фигурата чии темиња се темињата на триаголниците и темињата на правоаголникот е 80 cm. Пресметај ја плоштината на правоаголникот.

3. Нека е A={1, 2, 3, 4}, B={0, 1, 2}, C={5, 6}. Провери ја точноста на равенствата:

а) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;
б) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

4. Од две различни места A и B, во исто време, еден спроти друг, тргнале двајца велосипедисти. Првиот се движел со брзина 13 km на час, а вториот со 15 km на час. Во моментот кога се сретнале вториот поминал 6 km повеќе. Пресметај го растојанието меѓу местата A и B.

V одделение

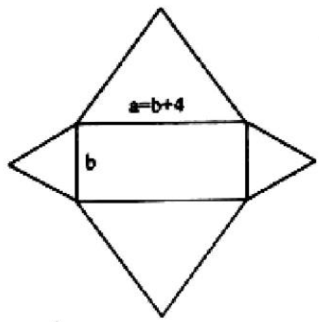
1. Транзитивна е само релацијата на цртежот под в).

а) не е транзитивна бидејќи нема $b \to d$;

б) не е транзитивна бидејќи нема $a \to d$, $b \to d$;

в) не е транзитивна бидејќи нема $a \to d$, $b \to c$, $b \to d$.

2. Од цртежот се гледа дека периметарот на правоаголникот е два пати помал од периметарот на фигурата т.е. $L=40$ cm.



Од $40=2(a+b)$ следува дека $a+b=20$, а како е $a=b+4$, имаме: $b+4+b=20$, т.е. $b=8$ и $a=8+4=12$ cm, а $P=12\cdot 8=96$ cm^2.

3. а) $A\cap B=\{1, 2\}$,
$(A\cap B)\times C=\{1, 2\}\times\{5, 6\}=\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$;
$A\times C=\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$,
$B\times C=\{(0, 5), (0, 6), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$,
$(A\times C)\cap(B\times C)=\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$.
Заклучок: Равенството под а) е точно.
б) $A\setminus B=\{3, 4\}$, $(A\setminus B)\times C=\{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$;
$(A\times C)\setminus(B\times C)=\{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$.
Заклучок: Равенството под б) е точно.

4. Бидејќи за секој час вториот велосипедист изминува по 2 km повеќе отколку првиот, 6 km тој ќе помине за 3 часа, т.е. секој возел по 3 часа.
Растојанието $\overline{AB} = 3\cdot 13+3\cdot 15=84$ km.

VI одделение

1. Одреди го x од изразите: а) $\left(3\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}\right)\cdot x=0$; б) $(-8)\cdot(x+3)=0$.

2. Марко е три пати помлад од таткото, а два пати постар од сестрата. Таткото и сестрата заедно имаат 42 години. Колку години има Марко ?

3. Одреди колку страни има многуаголник кај кој може да се повлечат 252 дијагонали.

4. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$), со периметар 22 cm, е повлечена тежишната линија AA_1. Периметрите на триаголниците ABA_1 и AA_1C соодветно се 17 cm и 19 cm. Одреди ги должините на страните на триаголникот ABC.

VI одделение

1. а) $\left(3\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}\right)x=0$; бидејќи $\left(3\frac{4}{5}-1\frac{3}{4}\right)\neq 0$ следува дека $x=0$.

б) $-8(x+3)=0$, бидејќи $-8\neq 0$ следува дека $x+3=0$, т.е. $x=-3$.

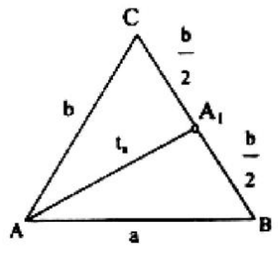
2. Ако со x ги означиме годините на сестрата, тогаш годините на Марко се 2x, а на таткото 6x.

Бидејќи е $x+6x=42$, следува дека $x=6$. Марко имал $2\cdot 6=12$ години.

3. Ако со n го означиме бројот на страните на многуаголникот, тогаш: $\frac{n(n-3)}{2}=252$;

$n(n-3)=504=24\cdot 21$; $n=24$. Многуаголникот има 24 страни.

4. Од триаголникот ABC имаме: $a+2b=22$.



Од ΔABA_1 имаме: $t_a+a+\frac{b}{2}=17$.

Од ΔAA_1C имаме: $t_a+b+\frac{b}{2}=19$.

Ако ги собереме левите и десните страни на равенствата ќе добиеме: $2t_a+a+2b=36$, а бидејќи е $a+2b=22$, имаме: $2t_a=36-22=14$; $t_a=7$ cm.

Од $7+b+\frac{b}{2}=19$ добиваме $b=8$ cm, а од $a+2b=22$, добиваме $a=6$ cm.

VII одделение

1. A(x) и B(x) се полиноми такви што: $A(x)+(4x^2+1)=2x^2-3$ и $B(x)-(2x^2-3x-1)=5x-4$. Одреди го производот $A(x)\cdot B(x)$.

2. Нека N, P и S се средини на страните AB, BC и AC на ΔABC, а M подножна точка на висината кон страната AB. Да се докаже дека четириаголникот MNPS е рамнокрак трапез.

3. Во 5 автобуси и 2 тролејбуси можат да се превезат 300 патници, а во 2 автобуси и 3 тролејбуси 230 патници. Колку патници можат да се превезат со 1 автобус, а колку со 1 тролејбус?

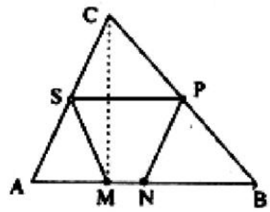
4. Во правоаголен триаголник ABC ($AC\perp BC$) со должини на страните a, b и c е впишана кружница со радиус r. Докажи дека $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.

VII одделение

1. Од дадените изрази ги определуваме полиномите: $A(x)=-2x^2-4$, $B(x)=2x^2+2x-5$, а потоа $A(x)\cdot B(x)=(-2x^2-4)\cdot(2x^2+2x-5)=-4x^4-4x^3+2x^2-8x+20$.

2. Отсечката SP е средна линија на триаголникот ABC, $SP \parallel AB$, т.е. четириаголникот MNSP е трапез. Треба да докажеме дека $\overline{PN}=\overline{SM}$. Отсечката PN е исто така средна линија на триаголникот, т.е. $\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$.

Отсечката SM е тежишна линија на правоаголниот триаголник AMC кон хипотенузата. $\overline{SM}=\overline{SA}=\overline{SC}$, бидејќи S е центар на опишаната кружница околу ΔAMC, т.е. $\overline{SM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Од $\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{SM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, следува дека $\overline{PN}=\overline{SM}$, т.е. четириаголникот е рамнокрак трапез.



3. I - решение: Ако првиот услов го помножиме со 2, ќе добиеме:

во 10 автобуси и 4 тролејбуси ќе се превезат 600 патници.

Ако вториот услов на задачата го помножиме со 5 ќе добиеме:

во 10 автобуси и 15 тролејбуси се превезуваат $5\cdot230=1150$ патници.

Ако ги споредиме добиените заклучоци, ќе добиеме:

во 11 тролејбуси се превезуваат $550:11=50$ патници, а во еден тролејбус 50 патници.

Во еден автобус се превезуваат x патници, а од $5x+2\cdot50=300$, $x=40$ патници.

II - решение: Нека x е бројот на патниците кои се превезуваат во еден автобус, а y во еден тролејбус, тогаш имаме:

$$\begin{cases}2x+3y=230\\5x+2y=300\end{cases}$$

Множејќи ја првата равенка со пет, а втората со два, и потоа одземајќи ги равенките ќе добиеме:

$$-\begin{cases}10x+15y=1150\\10x+4y=600\end{cases}$$
$$11y=550$$

$y=550:11=50$ патници; $x=40$ патници.

4. Види: II р.н. VIII/4.

VII одделение

1. $A(x)$ и $B(x)$ се полиноми такви што: $A(x)+(4x^2+1)=2x^2-3$ и $B(x)-(2x^2-3x-1)=5x-4$. Одреди го производот $A(x)\cdot B(x)$.

2. Нека N, P и S се средини на страните AB, BC и AC на ΔABC, а M подножна точка на висината кон страната AB. Да се докаже дека четириаголникот MNPS е рамнокрак трапез.

3. Во 5 автобуси и 2 тролејбуси можат да се превезат 300 патници, а во 2 автобуси и 3 тролејбуси 230 патници. Колку патници можат да се превезат со 1 автобус, а колку со 1 тролејбус?

4. Во правоаголен триаголник ABC ($AC\perp BC$) со должини на страните a, b и c е впишана кружница со радиус r. Докажи дека $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.

VIII одделение

1. Нека t е време на движењето на возилата, а s_k и s_a остатокот од патот кој треба да го поминат камионот и автомобилот.

$s_k = 900-45t$ - е остатокот од патот на камионот.

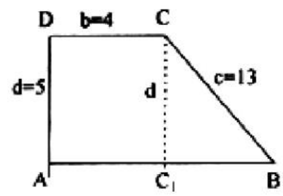
$s_a = 900-75t$ - е остатокот од патот на автомобилот.

Од условот $s_k=3s_a$, имаме:

$$900-45t=3(900-75t).$$

Со решавање на равенката ќе добиеме t=10 часа, т.е. на камионот му остануваат уште $900-45\cdot 10=450$ km, а на автомобилот му остануваат $900-75\cdot 10=150$ km.

2. Од цртежот се гледа дека $\overline{CC_1} = d = 5$ dm.



Од правоаголниот триаголник CC_1B имаме:

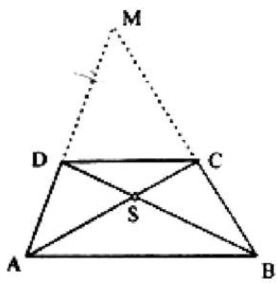
$\overline{C_1B} = \sqrt{c^2 - d^2}$; $\overline{C_1B} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ dm, а

$\overline{AB} = b + \overline{C_1B} = 16$ dm.

Плоштината на трапезот е: $P = \dfrac{(\overline{AB}+\overline{DC})}{2} \cdot \overline{AD}$;

$P = \dfrac{(16+4)}{2} \cdot 5 = 50 \text{ dm}^2$

3. Дадено е: $\overline{AB}=15$ cm, $\overline{BC}=9$ cm и $\overline{AS}:\overline{SC}=3:1$. Од сличноста на триаголниците ABS и CDS следува: $\overline{AS}:\overline{SC} = \overline{AB}:\overline{DC}$ или $3:1=15:\overline{DC}$, т.е. $\overline{DC}=5$ cm. Од сличноста на ΔABM и ΔDCM следува: $\overline{AB}:\overline{BM} = \overline{DC}:\overline{CM}$. Бидејќи е $\overline{BM} = 9 + \overline{CM}$, имаме: $15:(9+\overline{CM})=5:\overline{CM}$. Оттука следува: $\overline{CM}=4,5$ cm.



4. Види V р.н. VIII/2.