XXXI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение – деветтолетка

Задача 1. Дадени се броевите

$$A=1+3+5+...+99 \text{ и } B=2+4+6+...+100.$$

Кој број е поголем и за колку?

Решение. Секој собирок во B е за 1 поголем од собироците во A. Во A и во B има по 50 собироци. Значи поголем е бројот B и тоа за 50.

Задача 2. Во едно детско летувалиште летувале деца во 4 смени. Во првата смена биле пријавени 128 ученици, а во втората смена 2 пати повеќе отколку во првата. Во третата смена се пријавиле за 69 ученици повеќе отколку во втората, а во четвртата смена 3 пати помалку отколку во првата и третата смена заедно. Но, во првата смена не дошле 5 деца, во втората 3 деца, а во четвртата смена 4 деца. Колку вкупно деца летувале во ова детско летувалиште?

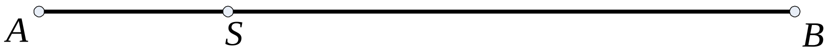
Решение. Во втората смена се пријавиле $128\cdot 2=256$ ученици, во третата $256+69=325$ ученици, а во четвртата $(128+325):3=151$ ученици. Значи вкупно летувале $(128-5)+(256-3)+325+(151-4)=848$ ученици.

Задача 3. Наставничката на секој ученик му дала по 2 јаболка и во кошницата останале 19 јаболка. Колку ученици и колку јаболка има, ако нивниот вкупен збир е 100?

Решение. Ако со x се означи бројот на ученици, тогаш во кошницата ќе има $2x+19$ јаболка. Од условот дека вкупниот збир на ученици и јаболки е 100, се добива $x+2x+19=100$. Со решавање на равенката добиваме дека има 27 ученици и 73 јаболки.

Задача 4. Отсечката AB со точката S е поделена на два дела кои се разликуваат за 8 cm. Најди ја должината на отсечката, ако покусиот дел е трипати помал од подолгиот дел.

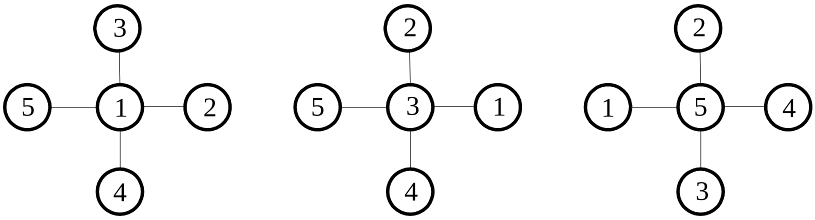
Решение. Нека x и y се должините на деловите на кои е поделена отсечката. Од условот на задачата должините на делбените делови се x и $x+8$ (со други зборови $y=x+8$). Но, повторно од условот на задачата $x+8=3x$. Но тогаш $2x=8$, односно $x=8:2=4\text{ cm}$.



Значи должините на делбените делови се 4 cm и 12 cm, а вкупната должина на отсечката е $4\text{ cm}+12\text{ cm}=16\text{ cm}$.

Задача 5. Во секое крукче од цртежот треба да се запише еден од броевите $1, 2, 3, 4$ и 5, така што збирот во трите вертикални крукчиња да биде еднаков на збирот на броевите во трите хоризонтални крукчиња. Колку решенија има задачата?

Решение. Од множеството $\{1,2,3,4,5\}$ треба да се изберат две подмножества кои имаат празен пресек, така што збировите на елементите во секое од нив да се еднакви. Тоа може да се направи на следните начини:



1° $\{3,4\}$ и $\{2,5\}$

2° $\{1,5\}$ и $\{2,4\}$

3° $\{4,1\}$ и $\{3,2\}$

Притоа, во случајот 1° имаме збир $3+4+1=1+2+5$, во случајот 2° имаме $1+3+5=2+3+4$ и во третиот случај имаме $5+4+1=2+3+5$

Значи, задачата има три решенија.

V одделение – деветтолетка

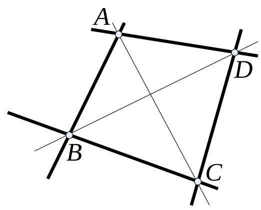
Задача 1. Пресметај:

$$20130+2\cdot(480\cdot4\cdot14+30\cdot44\cdot16)-(5\cdot80\cdot43+19\cdot400\cdot3)\cdot2$$

Решение. Со непосредно пресметување добиваме

$$\begin{aligned}20130+2\cdot(480\cdot4\cdot14+30\cdot44\cdot16)-(5\cdot80\cdot43+19\cdot400\cdot3)\cdot2 &=\\ &=20130+2\cdot(480\cdot56+44\cdot480)-(400\cdot43+400\cdot57)\cdot2\\ &=20130+2\cdot480\cdot100-2\cdot400\cdot100\\ &=20130+96000-80000\\ &=20130+16000=36130\end{aligned}$$

Задача 2. Дадени се точките *A*, *B*, *C* и *D* од кои никои три не припаѓаат на иста права. Испиши ги сите агли на кои врвот им е некоја од дадените точки а на краците припаѓаат две од преостанатите три точки. Потоа испиши ги сите отсечки формирани со овие 4 точки. Што има повеќе отсечки или агли?



Решение. Има 12 агли:

$\measuredangle ABC, \measuredangle ABD, \measuredangle DBC, \measuredangle BCD, \measuredangle BCA, \measuredangle ACD,$

$\measuredangle CDA, \measuredangle CDB, \measuredangle BDA, \measuredangle DAB, \measuredangle DAC, \measuredangle CAB$

Има 6 отсечки: AB, AC, AD, BC, BD, CD . Значи има повеќе агли.

Задача 3. Мартин има три канти од кои две собираат точно по $3l$ и $5l$, а во третата има $10\,l$ млеко. Тој со помош на трите канти треба да измери точно $4l$ млеко.

Дали Мартин може тоа да го направи и како?

Решение. Може. Од кантата со $10\,l$ ќе ја наполни кантата со $3\,l$. Потоа, млекото од кантата со $3\,l$ ќе го претури во кантата со $5\,l$. Повторно, од кантата со $10\,l$ ќе ја наполни кантата со $3\,l$. Од кантата со $3\,l$ ќе ја дополни кантата со $5\,l$. Во кантата со $3\,l$ ќе остане $1\,l$. Млекото од кантата со $5\,l$ ќе го претури во кантата со $10\,l$. Преостанатиот $1\,l$ што е во кантата со $3\,l$ ќе го претури во цантата со $5\,l$. Сега празната канта од $3\,l$ ќе ја наполни и потоа ќе ја претури во кантата со $5\,l$ па во неа ќе има $4\,l$ млеко.

Задача 4. Миле имал правоаголен картон со страни 55 cm и 20 cm. Тој го разделил на квадрати со периметар 20 cm. Колку квадрати Миле добил?

Решение. Периметарот на делбените квадрати е $L=20\text{ cm}$. Ако страната на делбениот квадрат е a, тогаш од равенката $4a=20$, добиваме $a=5\text{ cm}$.

Страната со должина 55 cm на правоаголниот картон може да се подели на $55:5=11$ дела со должина 5 cm. Страната со должина 20 cm може да се раздели на $20:5=4$ дела со должина 5 cm. Според тоа, правоаголниот картон со страни 55 cm и 20 cm може да се раздели на $11\cdot 4=44$

квадратни парчиња со периметар $20\,\text{cm}$. Значи, Миле добил 44 квадратни парчиња.

Задача 5. Семејството Стојановски има три сина: Никола, Ристе и Александар. Таткото Петар Стојановски има 35 години. Збирот на годините на трите деца е два пати помал од годините на мајката Елена, која има 5 години помалку од годините на таткото Петар. Минатата година најстариот син бил на возраст еднаква на збирот на годините од неговите браќата.

Колку години има мајката Елена? Колку години има најстариот син Александар? Ако Никола има три пати помалку години од Ристе, колку години има најмалиот од браќата?

Решение. *Прв начин.* Нека a, b, c, d и e се годините на Никола, Ристе и Александар, таткото Петар и мајката Елена, соодветно. Следува

$$d=35,\ e=30,\ 2(a+b+c)=30,\ c-1=a-1+b-1 \text{ и } b=3a.$$

Следува

$$a+b+c=15 \text{ и } a+b-c=1, \text{ т.е. } a+b-c+2c=15$$

односно $1+2c=15$ или $c=7$. Оттука $a+b=8$ и $b=3a$, од каде имаме дека $a=2$ и $b=6$.

Значи Никола има 2, Ристе 6, Александар 7, Петар 35 и Елена 30 години.

Втор начин. Таткото Петар има 35 години. Мајката Елена има 5 години помалку, односно 30 години. Збирот на годините на децата е два пати помал од годините на мајката и изнесува 15. Пред една година збирот на годините на децата бил 12 години. Тогаш најстариот син Александар имал два пати помалку години од збирот, односно 6 години. Следува Александар има 7 години и Никола и Ристе имаат заедно 8 години. Бидејќи Никола има 3 пати помалку години од Ристе, значи Никола има 2, додека Ристе 6 години.

VI одделение – деветтолетка

Задача 1. Аголот α е поголем од својот комплементен агол за толку пати колку што пати е помал од својот суплементен агол. Пресметај го аголот α.

Решение. Од условот на задачата, постои број k таков што

$$\alpha = k(90^\circ - \alpha)$$

$$180^\circ - \alpha = k\alpha$$

Но, тогаш

$$k\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$k\alpha + \alpha = k \cdot 90^\circ$$

Според тоа, $k \cdot 90^\circ = 180^\circ$, од каде имаме $k = 2$. Но, тогаш $3\alpha = 180^\circ$, т.е. $\alpha = 180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Задача 2. За нумерирање на страниците на еден учебник потребни се 411 цифри. Колку страници има учебникот?

Решение. Книгата има 173 страници. За едноцифрените страници се потрошени 9 цифри, за двоцифрените страници потрошени се $90 \cdot 2 = 180$ цифри. Значи остануваат $411 - 189 = 222$ цифри, а тоа се $222 : 3 = 74$ страници, кои можат да се нумерираат со преостанатите цифри. Значи книгата има $9 + 90 + 74 = 173$ страници.

Задача 3. Дадени се два еднакви квадрати со плоштина од 100 cm^2. Страната на едниот квадрат се зголемила за 2 cm, а периметарот на другиот квадрат за 16 cm. Кој од добиените квадрати ќе има поголема плоштина и за колку?

Решение. Ако плоштината на дадените квадрати е 100 cm^2 тогаш нивните страни се 10 cm. Должината на страната на едниот од добиените квадрати е 12 cm. Ако периметарот на другиот квадрат се зголемил за 16 cm, тогаш неговата страна се зголемила за $16 : 4 = 4\text{ cm}$. Неговата страна е 14 cm.

Плоштината на првиот квадрат е $P_1 = 12 \cdot 12 = 144\text{ cm}^2$, а плоштината на другиот квадрат е $P_2 = 14 \cdot 14\text{ cm}^2 = 196\text{ cm}^2$. Разликата на нивните плоштини е

$$P_2 - P_1 = 196 - 144 = 52\text{ cm}^2.$$

Задача 4. На местата на a и b, во четирицифрените броеви, стави цифри така да збирот $\overline{323a} + \overline{b410}$ е делив со 9. Определи ги сите можни решенија.

Решение. Збирот на цифрите во дадениот израз е $13+a+b$. За да бројот биде делив со 9, треба и збирот на неговите цифри да е делив со 9, а како $a+b\leq 18$, имаме две можности и тоа $a+b=5$ или $a+b=14$, каде $b\neq 0$. Тогаш секој од подредените парови:

$$(0,5),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(5,9),(9,5),(6,8)\ (8,6)\ \text{и}\ (7,7)$$

е решение.

Задача 5. Никола купил 4 различни моливи. Сите моливи, без првиот, заедно чинат 42 денари, сите моливи, без вториот, заедно чинат 40 денари, сите моливи, без третиот, заедно чинат 38 денари и сите моливи , без четвртиот заедно чинат 36 денари. Колку чини секој од моливите посебно?

Решение. Нека со a, b, c, d ги означиме цените на првиот, вториот, третиот и четвртиот молив, соодветно. Ако ги собереме сите суми, од условот на задачата ќе добиеме дека Никола би платил 156 денари доколку сака да купи по три од секој од моливите. Тоа значи дека Никола, всушност платил вкупно 52 денари за моливите. Оттука, јасно е дека $a=10$ денари, $b=12$ денари, $c=14$ денари и $d=16$ денари.

VII одделение – деветтолетка

Задача 1. Множеството M се состои од сите прости делители на бројот 2310. Колку броеви се производ на точно два елементи од множеството M ?

Решение. Прости делители на бројот 2310 се $2, 3, 5, 7$ и 11, и нивниот производ е точно 2310. Значи, $M=\{2,3,5,7,11\}$, а множеството од попарни производи на елементите од M е множеството

$$A=\{6,10,14,22,15,21,33,35,55,77\},$$

и тоа има 10 елементи. Значи, бараниот број е 10.

Задача 2. Бојан, Мирко и Здравко имале кеса со џамлии. Бојан во кесата додал онолку џамлии колку што имало во кесата и уште една џамлија. Потоа, Мирко додал во кесата двојно повеќе џамлии од бројот на џамлии што во тој момент се наоѓал во кесата плус три џамлии. На крај Здравко додал тројно повеќе џамлии од бројот на џамлии што во тој момент се наоѓал во кесата плус пет џамлии. На крај во кесата имало 149 џамлии. Колку џамлии имало во кесата на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во кесата имало x џамлии. Откога Бојан додал џамлии во кесата, во неа имало

$$x+x+1=2x+1$$

џамлии. Кога Мирко ги додал џамлиите, во кесата имало

$$2x+1+4x+2+3=6x+6$$

џамлии. На крај, откога Здравко ги додал џамлиите во кесата, во неа имало

$$6x+6+18x)+18+5=24x+29$$

џамлии. Сега доволно е да ја решиме равенката

$$24x+29=149.$$

Нејзино решение е $x=5$.

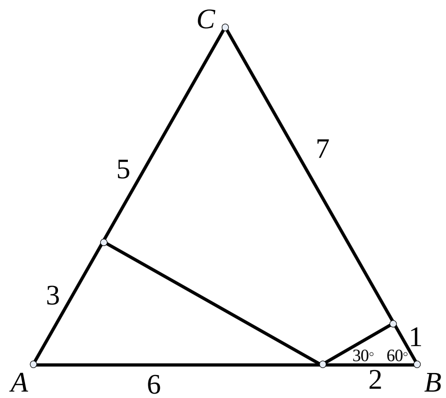
На почетокот во кесата имало 5 џамлии.

Задача 3. Од точката M која страната AB на рамностраниот триаголник ABC ја дели на делови со должина 6 cm и 2 cm повлечени се нормали на останатите страни. Одреди го растојанието од точката C до повлечените нормалите.

Решение. Триаголниците AMD и MBE се правоаголни со агли 30^0 и 60^0, па

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AM}=3\text{ cm} \text{ и}$$

$$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{MB}=1\text{ cm}.$$



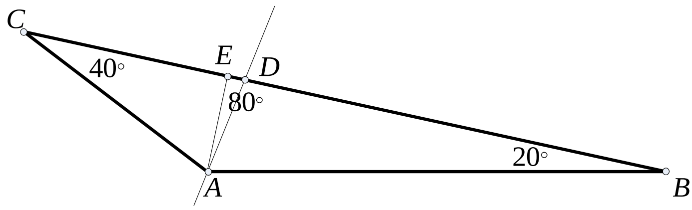
Бидејќи страната на триаголникот ABC е 8 cm имаме дека бараните растојанија од C до нормалите се 5 cm и 7 cm.

Задача 4. Пред и зад бројот 10 напиши по една цифра, така што добиениот број е делив со 36 и количникот на тој број со 36 е број запишан со различни цифри од дадениот број.

Решение. Да го означиме бараниот број со $\overline{a10b}$. Тој број треба да е делив со 36, односно со 4 и со 9. Од условот бројот да е делив со 4 следува дека последната цифра може да биде 0, 4 или 8. Од условот бројот да е делив со 9 следува дека $9|(a+1+b)$, односно $a\in\{4,8,9\}$. Значи можни се броевите $4104, 8100$ и 9108. Бидејќи $4104:36=114$, $8100:36=225$ и $9108:36=253$ следува дека бараниот број е 9108.

Задача 5. Даден е триаголник ABC со $\measuredangle CBA = 20^0, \measuredangle ACB = 40^0$ и $\overline{AD} = 2$ cm, каде D е пресечната точка на симетралата на аголот кај темето A и страната BC. Одреди ја разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$.

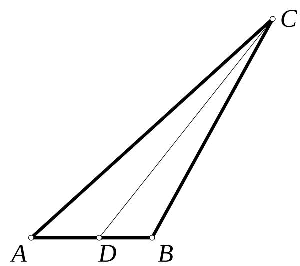
Решение. На страната BC избираме точка E таква што $\measuredangle AEB = 80^0$. Тогаш $\measuredangle BAE = 80^0$, па триаголникот ABE е рамнокрак т.е. $\overline{AB} = \overline{AE}$. Триаголникот AEC е рамнокрак, бидејќи $\measuredangle EAC = 40^0$, па $\overline{AE} = \overline{CE}$.



Триаголникот ADE е рамнокрак, бидејќи $\measuredangle ADE = 80^0$, па $\overline{AE} = \overline{AD} = 2$ cm. Според тоа $\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AD} = 2$ cm

VII одделение

Задача 1. Надворешните агли во еден триаголник се 20%, 35% и 45% од збирот на неговите надворешни агли. Определи го аголот помеѓу симетралата на најмалиот агол и најкратката страна.



Решение. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот. Тогаш надворешните агли се $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$ и $180^\circ - \gamma$, а нивниот збир е

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

Но, тогаш надворешните агли на триаголникот се $72^\circ, 126^\circ$ и 162°. Според тоа, неговите внатрешни агли се $108^\circ, 54^\circ$ и 18°.

Нека ABC е триаголник со пресметаните агли. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle ABC = 108^\circ$ и $\measuredangle ACB = 18^\circ$. Ако CD е симетралата на најмалиот агол ($D \in AB$), тогаш $\measuredangle DCB = 9^\circ$ и

$$\measuredangle CDB = 180^\circ - (9^\circ + 108^\circ) = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ.$$

Задача 2. Докажи дека бројот $\underbrace{666...6}_{2013-пати}$ не е квадрат на природен број.

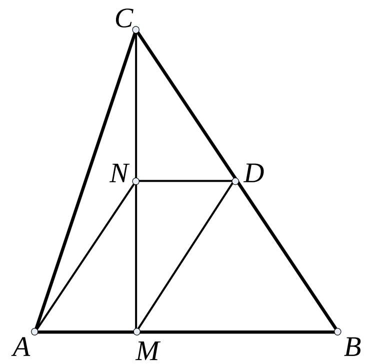
Решение. Бројот можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{666...6}_{2013-пати} = 6 \cdot \underbrace{1111...1}_{2013-пати},$$

па според тоа е делив со 2. Ако е полн квадрат, тогаш тој е делив со 4. Но $\underbrace{666....6}_{2013-пати}$ е делив со 4 ако и само ако 66 е делив со 4. Бидејќи $66 = 16 \cdot 4 + 2$ и тој не е делив со 4. Значи, $\underbrace{666....6}_{2013-пати}$ не е полн квадрат.

Задача 3. Во триаголникот ABC на страната AB избрана е точка M таква што $\overline{AM} : \overline{MB} = 1:2$. Докажи дека триаголниците AMC и MBC имаат барем по една тежишна линија со еднаква должина.

Решение: Да ги означиме средишните точки на CM и CB со N и D, соодветно. Тогаш ND е средна линија за триаголникот MBC, па $ND \| MB$ и $\overline{ND} = \frac{1}{2}\overline{MB}$. Бидејќи $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{MB}$ имаме дека $\overline{ND} = \overline{AM}$. Значи $AMDN$ е паралелограм, па $\overline{AN} = \overline{MD}$ и AN е тежишна линија на триаголникот AMC, а MD е тежишна линија на триаголникот MBC.



Задача 4. Ако $a + b = 1$, тогаш докажи дека важи

$$a^2b^2 + 3 = (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a^2+a+1)(b^2+b+1) &= a^2b^2 + a^2b + a^2 + ab^2 + ab + a + b^2 + b + 1 \\ &= a^2b^2 + 1 + ab(a+b) + a^2 + ab + b^2 + a + b \\ &= a^2b^2 + 2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ &= a^2b^2 + 2 + (a+b)^2 = a^2b^2 + 3\end{aligned}$$

Задача 5. Даден е реален број x. Користејќи ги операциите множење и делење на два добиени броеви можеме да го менуваме степенот на бројот x. На пример: $x\cdot x=x^2, x^2\cdot x^2=x^4, \frac{x^4}{x}=x^3$. Докажи дека во 14 чекори можеме да го добиеме бројот x^{2013}!

Решение. Првите 11 чекори се следните:

$$1^\circ\ x\cdot x=x^2,\ \ 2^\circ\ x^2\cdot x^2=x^4, \ldots\ldots, 11^\circ\ x^{1024}\cdot x^{1024}=x^{2048}.$$

Потоа имаме

$$x^{2016}=\frac{x^{2048}}{x^{32}}, x^{2012}=\frac{x^{2016}}{x^4}, x^{2013}=x^{2012}\cdot x.$$

Со тоа во 14 чекори го добивме на x^{2013}.

VIII одделение

Задача 1. Определи ги сите вредности на реалните броеви a, b, c и d такви што

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a(b+c+d).$$

Решение. Равенството можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a^2}{4}-ab+b^2+\frac{a^2}{4}-ac+c^2+\frac{a^2}{4}-ad+d^2+\frac{a^2}{4}=0$$

$$(\frac{a}{2}-b)^2+(\frac{a}{2}-c)^2+(\frac{a}{2}-d)^2+\frac{a^2}{4}=0$$

Збир на квадрати на реални броеви е нула, ако и само ако секој од нив е нула. Според тоа, последното равенство е точно ако и само ако

$$\frac{a}{2}-b=0, \frac{a}{2}-c=0, \frac{a}{2}-d, \frac{a}{2}=0,$$

односно,

$$b=c=d=\frac{a}{2}=0.$$

Значи, единствени реални броеви за кои почетното равенство е точно се $a=b=c=d=0$.

Задача 2. Односот на површините на страните на еден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на должините на рабовите на квадарот.

Решение. Нека a, b и c се должините на рабовите на квадарот. Од условот на задачата имаме $ab:bc:ca=2:3:5$, односно $\frac{ab}{2}=\frac{bc}{3}=\frac{ca}{5}$. Според тоа, $\frac{a}{2}=\frac{c}{3}$ и $\frac{b}{3}=\frac{a}{5}$. Но, тогаш $\frac{a}{10}=\frac{c}{15}$ и $\frac{b}{6}=\frac{a}{10}$. Според тоа $\frac{a}{10}=\frac{b}{6}=\frac{c}{15}$. Значи, $a:b:c=10:6:15$.

Задача 3. Ако $xy=6$ и $x^2y+xy^2+x+y=63$ тогаш колку е x^2+y^2?

Решение. Од $x^2y+xy^2+x+y=63$ следува дека важи

$$xy(x+y)+(x+y)=(xy+1)(x+y)=63 \iff 7(x+y)=63 \iff x+y=9$$

.

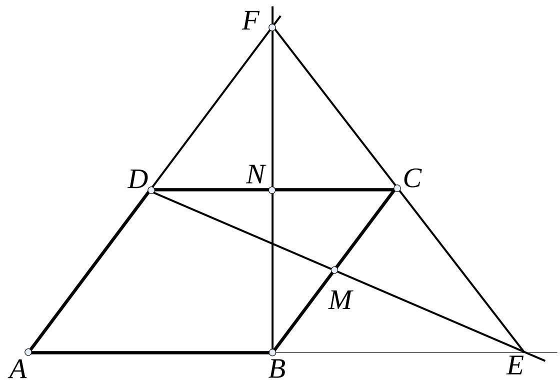
Значи,

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=81-12=69.$$

Задача 4. Ако број од облик 2^k е најмалку четирицифрен, докажи дека неговите последни четири цифри не може да се исти!

Решение. Бидејќи бројот 2^k е најмалку четирицифрен $k\geq 10$. Нека претпоставиме дека неговите последни четири цифри се исти. Тогаш $2^k=10^4X+\overline{xxxx}$. Од $16|10^4$ и $16|2^k$, следува дека бројот $\overline{xxxx}=x\cdot 1111$ е делив со 16 исто така, што не е можно. Следува дека најмалку четирицифрен број од облик 2^k не може да има исти последни четири цифри.

Задача 5. Нека $ABCD$ е паралелограм и M и N се средини на страните BC и CD соодветно. Нека E е пресекот на правата DM со правата AB и F е пресекот на правата BN со правата AD. Докажи дека E, C и F се колинеарни.



Решение. Од условот на задачата $\overline{DN}=\overline{CN}$. Уште $\measuredangle BNC=\measuredangle DNC$ и $\measuredangle FDN=\measuredangle NCB$, па $\triangle DNF\cong\triangle CNB$. Добиваме дека $\overline{BC}=\overline{DF}$ и бидејќи тие се и паралелни $DBCF$ е паралелограм. Од ова BD и CF се паралелни. Понатаму,

$$\overline{BM}=\overline{CM},\ \measuredangle DMC=\measuredangle EMB \text{ и } \measuredangle MCD=\measuredangle EBM.$$

Од ова добиваме $\triangle CDM\cong\triangle BEM$. Следува $\overline{BE}=\overline{DC}$, па бидејќи тие се и паралелни $BECD$ е паралелограм. Па се добива дека CE е паралелна со BD. Од ова следува дека E, C и F се колинеарни.