XXVII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

III одделение

Задача 1. Во овоштарникот на дедо Ване растат овошни дрвца и тоа: 240 дрвца кајсии, 260 дрвца праски и 130 дрвца јаболка. Учениците од одделението на малиот Ване, внукот на дедо Ване, на денот на дрвото дошле во овоштарникот и засадиле уште 75 дрвца кајсии, 126 дрвца праски и 142 дрвца јаболка.

а) Колку ученици има во одделението на малиот Ване, ако секој ученик засадил по 7 овошни дрвца?

б) По колку овошни дрвца од секој вид има во овоштарникот на дедо Ване?

в) Колку вкупно овошни дрвца има во овоштарникот на дедо Ване?

Решение. а) На денот на дрвото се засадени вкупно $75+126+142=343$ овошни дрвца. Бидејќи секој ученик засадил по 7 дрвца, во одделението има $343:7=29$ ученици.

б) Има: $240+75=325$ дрвца кајсии, $260+126=386$ дрвца праски и $130+142=$ 272 дрвца јаболка.

в) Во овоштарникот има вкупно $325+386+272=983$ овошни дрвца.

Задача 2.Куќите во една улица се нумерирани од 1 од 100. Колку пати во броевите на куќите се јавува цифрата 7?

Решение. Броевите на куќите што ја содржат цифрата 7 се: 7, 17, 27,37,47,57,67,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,87,97. Во тие броеви таа се појавува вкупно 20 пати (двапати ја има во бројот 77).

Задача 3. Ана замислила еден број. Тој број го помножила со 7, потоа му додала 6, добиениот резултат го поделила со 5 и го добила бројот 53. Откриј кој број го замислила Ана!

Решение. *Прв начин.* Нека бројот што го замислила Ана се означи со x. Тогаш, од условот во задачата се добива равенката $(7x+6):5=53$, од каде $x=53$.

Втор начин. Реализирајќи ги условите од задачата од назад кон напред се добива $(53\cdot 5-6):7=37$.

Задача 4.Сашка имала 3 корпи со јаболка. Во корпите имало 12, 14 и 22 јаболка. Дозволено е Сашка да избере две корпи, од трите корпи кои ги имала, и да префрлува јаболка од едната во другата корпа. Притоа, мора да префрли од една во друга корпа што ги избрала онолку јаболка колку што има во корпата во која ги додава (префла) јаболката. Сашка направила три префрлувања на опишаниот начин и во сите корпи имало по ист број јаболка. Како Сашка го направила тоа?

Решение. Прво Сашка ги избрала корпите со 22 и 14 јаболка. Од корпата во која има 22 јаболка префрлила 14 јаболка во корпата со 14 јаболка и после првото префрлување, во корпите има 8, 28 и 12 јаболка.

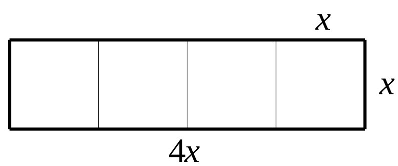
Вториот пат ги избрала корпите со 28 и 12 јаболка. Од корпата со 28 јаболка префрлила 12 јаболка во корпата со 12 јаболка. После второто префрлување во корпите има 16, 24 и 8 јаболка.

Третиот пат ги избрала корпите со 24 и 8 јаболка. Од корпата во која има 24 јаболка префрлила 8 јаболка во другата корпа. После третото фрлање во корпите има 16, 16 и 16 јаболка, т.е.ист број на јаболка.

Задача 5. Збирот од должините на страните на правоаголникот е 40 *cm*. Едната страна на правоаголникот е 4 пати подолга од другата.

а) Да се определат должините на страните на правоаголникот.

б) Дали може, со 3 паралелни прави, дадениот правоаголник да се подели на 4 еднакви квадрати? Нацртајте!



в) За колку сантиметри се разликува збирот од должините на страните на делбен квадрат од збирот од должините на страните на правоаголникот?

Решение. а) Имаме $x+x+4x+4x=40$, $10x=40$, $x=4cm$. Едната страна е долга 16 *cm* а другата 4 *cm*.

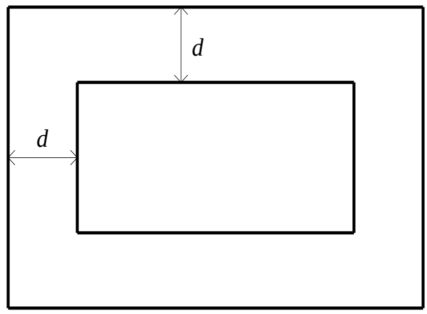
б) Може, страната на секој квадрат е долга по 4 см.

в) Збирот на страните на квадратот е

$$4+4+4+4=16\,cm,\ 40-16=24\,cm.$$

IV одделение

Задача 1.Тревна патека обиколува правоаголно асфалтно игралиште со димензии 36 *dm* и 12 *m* (како на цртежот). Ширината d на патеката е еднаква на четвртината од полупериметарот на игралиштето. Колку метри



жица е потребно да се огради тревната патека од игралиштето, ако тоа се заобиколи со 5 реда на жица? Колку столбови се потребни за да се прицврсти оградата, ако растојанието меѓу било кои два соседни столба е $6\ dm$?

Решение. Имаме, 12 *dm* = 120 dm. Ширината на патеката е

$$d=(120+36):4, d=39\ dm\ .$$

Значи едната страна на тревникот е долга $2\cdot 39+120=198dm$, а другата е долга $2\cdot 39+36=114dm$.

За оградување на еден ред ограда на тревникот е потребно:

$$2(198+114)+2(120+36)=624+312=936dm\,.$$

Бидејќи е потребно да се обиколи 5 пати, потребно е $5\cdot 936=4680dm$, т.е. 468 метри жица.

За прицврстување на оградата потребни се $936:6=156$ столбови.

Задача 2.Учениците во IV одделение решавале тест по математика кој содржи 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 5 поени, а за секоја неточно решена или нерешена задача се губат по 3 поени.

а) Колку задачи решил Иван, ако освоил 76 поени?

б) Колку најмногу задачи треба да погреши ученик ако сака сигурно да добие петка? Најмалиот број на поени потребни за оцена 5 е решението на равенката $8245:x=97$.

Решение.а) Нека е *x*-број на решени задачи. Според условите на задачата, се добива следната равенка:

$$5x-3\left(20-x\right)=76,\quad 8x=76+60,\ \ x=136:8,\ \ x=17\,.$$

Иван решил 17 задачи.

б) Имаме

$$8245:x=97,\quad x=8245:97,\quad x=85\,.$$

Бидејќи за секоја нерешена или неточно решена задача се губат по 3 поени, можни се следните случаи:

1) решени се сите 20 задачи: $20\cdot 5=100$,

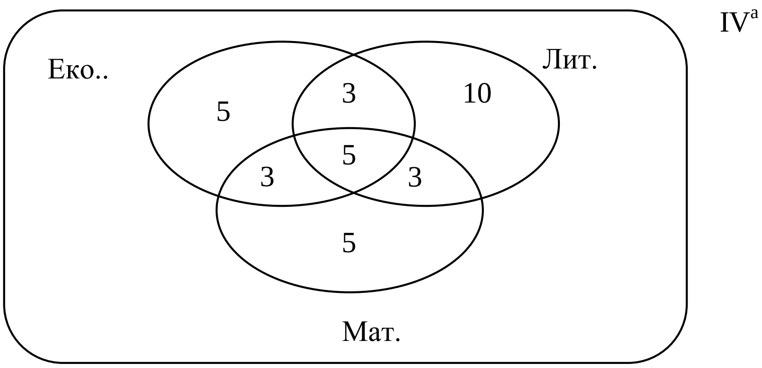
2) не е решена една задача: $19\cdot 5-3=95-3=92$,

3) не се решени две задачи, $18\cdot 5-2\cdot 3=90-6=84<85$.

Значи, за сигурна петка може да се погреши најмногу една задача.

Задача 3. Учениците од IV^{a} одделение членуваат во еколошката, литературната или математичката секција. Пет ученици членуваат во сите три секции, а девет ученици членуваат во по две секции. Во еколошката и литературната членуваат 8 ученици, и исто толку во литературната и математичката секција. Исто така, 20 ученици членуваат само во по една секција и тоа по 5 во еколошката и математичката секција. Колку ученици има во IV^{a} одделение?

Решение. *Прв начин.* Со помош на Ојлер – Венов дијаграм



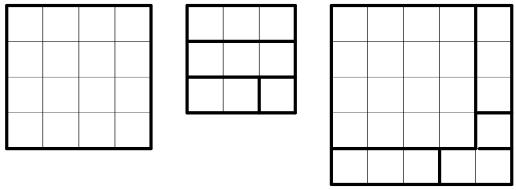
Имаме, $|IV^{a}|=5+3+3+3+1+5+10=34$.

Втор начин. Во сите три секции членуваат 5 ученици. Бидејќи во секои две членуваат по 8 ученици, тогаш само во по две секции (без учениците кои членуваат во сите три секции истовремено) членуваат по 3 ученика. Во еколошката секција членуваат вкупно $5+3+3+5=16$ ученика. Слично, во математичката секција ќе членуваат 16 ученици. Според условот на задачата, само во литературната секција ќе членуваат $20-5-5=10$ ученика, а вкупно, во таа секција ќе членуваат 21 ученик. Во одделението има $5+3+3+3+10+5+5=34$ ученици.

Задача 4. Димитар има два квадратни картони кои имаат страни $3\,\mathrm{cm}$ и $4\,\mathrm{cm}$. Дали може од нив, со сечење, да формира квадрат без да отфрли материјал? Во случај на потврден одговор, колку е страната на тој квадрат?

Решение. Димитар може да состави квадрат со должина на страната од 5 *cm*. Квадратот со страна 3 *cm* ќе го раздели на правоаголници со страни 1 *cm* и 3 *cm*, еден правоаголник со страна 1 *cm* и 2 *cm* и еден квадрат со страна 1 *cm*. Нив ќе ги додаде на квадратот со страна 4 *cm* како на цртежот.

Забелешка. Можни се и други решенија.



Задача 5. Банкнота од 100 денари треба да сераситни на монети од 2 и 5 денари, при што нивниот број е 32. Ако такво раситнување постои, колку монети од 2 и колку монети од 5 денари се употребени?

Решение. *Прв начин.* Ако избереме сите 32 монети да се 2 денари, тогаш би имале 64 денари, па банкнотата од 100 денари не е раситнета. Ако една монета од 32 – те монети од 2 денари се замени со монета од 5 денари, сумата се зголемува за $5-2=3$ денари. Сумата од 64 денари треба да ја зголемиме за $100-64=36$ денари. Според тоа, постапката на замена на монетата од 2 со монетата од 5 денари треба да ја повториме $36:3=12$ пати. Така би добиле 12 монети од 5 денари и 20 монети од по 2 денари. Тоа е бараното раситнување.

Втор начин. Нека е x-број на монети од 5 денари. Тогаш $32-x$ е бројот на монети од 2 денари. Се добива равенката: $5x+2(32-x)=100$, од каде $x=12$.

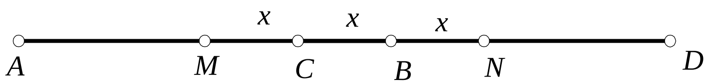
V одделение

Задача 1. Правоаголна метална плочка има маса 10 g. Таа треба да се раздели (расече) на три дела кои имаат целобројна маса. Со добиените три дела може да се измери во грамови секоја маса од 1 до 10 грама која е природен број. Колкава треба да биде масата на секој од делбените делови делови ?

Решение. Деловите на кои треба да се пресече плочката се 2 g, 3 g, 5 g ($2+3+5=10$). Масите од 2 g, 3 g, 5 g, 7 g, 8 g, 10 g можат да се измерат директно. Масата од 1 g ќе биде најмала од сите, па кога ќе ја ставиме на вага со 2 g, страната со 2 g ќе натежне. Масата од 4 g кога ќе ја ставиме на вага со маса од 3 g , страната со 4 g ќе натежне. Кога масата од 4 g ќе ја ставиме на вага со маса од 5 g, страната со 5 g ќе натежне. Масата од 6 g ќе биде полесна на вагата од масата од 7 g, но потешка од 5 g. Аналогно за 9 g, бидејќи $8\leq 9\leq 10$.

Задача 2. Две отсечки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ со еднакви должини лежат на иста права, така што $\frac{1}{4}$ од нивните должини им е заедничка. Определи ја должината на тие отсечки ако растојанието меѓу нивните средни точки е 6 *cm*.

Решение. Нека со x ја означиме должината на отсечката $\overline{CB}$. Тогаш должината на отсечката $\overline{MN}$, која има должина 6 *cm*, изразена преку x е $3x$. Одовде имаме дека $3x = 6$, па $x = 2$ *cm*. Должината на отсечката $\overline{AB}$ е двапати поголема од должината на отсечката $\overline{MB}$, односно 4 пати поголема од должината на отсечката $\overline{CB}$. Па според тоа должината на отсечката $\overline{AB} = 4 \cdot 2 = 8$ *cm*. Бидејќи од условот на задачата отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ се еднакви следува дека и отсечката $\overline{CD} = 8$ *cm*.



Задача 3. Бројот 1 000 000 пртстави го како производ на два броја, во чиј запис не се појавува ниту една нула.

Решение. Бројот 1 000 000 можеме да го претставиме како

$$1000000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5).$$

Ако x и y се природни броеви такви што $xy = 1000000$ и во записот на бројот x не се појавува цифрата 0, тогаш 2 е делител на x, но 5 не е делител на x или 2 не е делител на x, а 5 е делител на x. Ако 2 е делител на x и 5 е делител на x, тогаш 10 е делител на x и цифрата на единиците на x е нула. Иста е дискусијата и за бројот y. Според тоа единствени можности се: $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ и $y = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625$, или $x = 15625$ и $y = 64$. Во секој случај бараното претставување е $1000000 = 15625 \cdot 64$.

Задача 4. Дванаесетте витези на кружната маса треба да изберат двочлена делегација за посета на кралот Артур. На колку начини може тоа да се направи, така што во двочлената делгација да не бидат витези кои седат еден до друг на кружната маса.

Решение. Нека претпоставиме дека кружната маса е кружница, а витезите кои седат на кружната маса се темиња на 12 – аголник. Секој пар витези што седат на масата кои прават двочлена делагација според условот на задачата, определуваат една дијагонала на 12 – аголникот. Според тоа, може да се формираат онолку делегации колку што има дијагонали во 12 – аголник. Бројот на дијагонали во 12 – аголник е еднаков на $\frac{12 \cdot 9}{2} = 54$.

Значи, може да формираат 54 двочлени делагации, на начин определен во задачата.

Задача 5. Дропката $\frac{59}{143}$ да се претстави како збир на две прави нескратливи дропки.

Решение. Бројот 143 можеме да го запишеме како $143=11\cdot 13$. Според тоа дропката $\frac{59}{143}$ може да се претстави во облик $\frac{59}{143}=\frac{59}{11\cdot 13}=\frac{x}{11}+\frac{y}{13}$. Ако десната страна на последното равенство го сведеме на најмал заеднички именител, добиваме $\frac{13x+11y}{143}=\frac{59}{143}$. Две дропки кои имаат еднаков именител се еднакви ако и само ако имаат еднаков броител. Бидејќи именителите на двете дропки во последното равенство се еднакви, тие ќе бидат еднакви ако им се еднакви броителите. Ако ги изедначиме броителите ја добиваме равенката $13x+11y=59$.

Со директно пребарување се добива дека единствено решение на последната равенка е $x=2, y=3$. Значи, $\frac{59}{143}=\frac{2}{11}+\frac{3}{13}$.

VI одделение

ЗАдача 1. Дадена е дропката $\frac{57}{71}$. Кој број треба да се одземе од броителот и истиот да се додаде на именителот па вредноста на дропката после скратувањето да е $\frac{1}{3}$?

Решение. Треба да се реши следнава равенка: $\frac{57-x}{71+x}=\frac{1}{3}$. Значи:

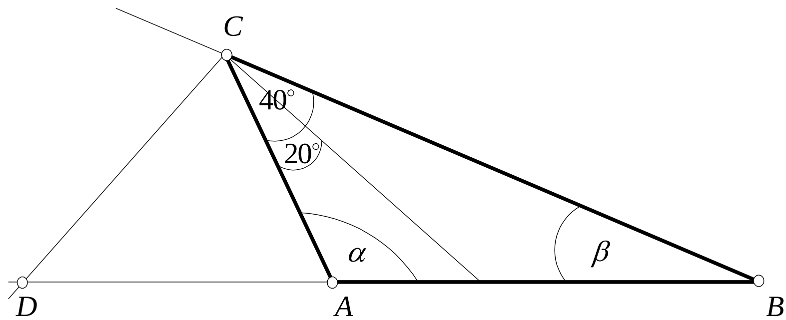
$3(57-x)=71+x$, т.е. $171-3x=71+x$, $171-71=x+3x$, $100=4x$, $x=25$.

Задача 2. Определи ја 2008-та цифра по децималната запирка во децималниот запис на бројот $\frac{1}{41}$.

Решение.Децималниот запис на бројот $\frac{1}{41}$ е $\frac{1}{41}=0,(02439)$. Значи групата од пет цифри 02439 по децималната запирка периодично се повторува бесконечно многу пати. Бројот 2008 можеме да го запишеме во облик $2008=5\cdot 401+3$. Според тоа, 2008-та цифра по децималната запирка е третата цифра од периодата, т.е. тоа е цифрата 4.

Задача 3. Во триаголникот *ABC*, $\measuredangle ACB = 40^\circ$. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето *C* ја сечат правата *AB* во точките *D* и *E*, така што $\triangle CDE$ е рамнокрак. Определи ги аглите на триаголникот *ABC*.

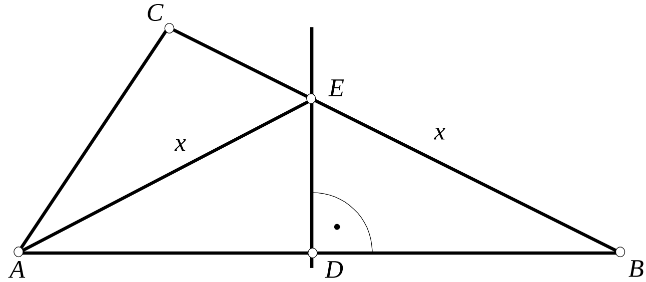
Решение. Нека *CD* е симетрала на надворешниот агол, а *CE* на внатрешниот во темето *C*. Симетралите *CD* и *CE* се нормални, тоа се симетрали на два напоредни агли, $\measuredangle DCE = 90^\circ$.



Од условот $\triangle CDE$ е рамнокрак, па следува дека тој е рамнокрак правоаголен со хипотенуза *DE*. Оттука следува дека $\measuredangle DEC = 45^\circ$. Тој е надворешен агол за $\triangle CEB$ т.е. $45^\circ = 20^\circ + \beta, \beta = 25^\circ$, а аголот $\alpha = 115^\circ$.

Задача 4. Во ΔABC, $\overline{AC} = 5\,cm$ и $\overline{BC} = 9\,cm$. Од средината на страната *AB* е повлечена нормала која што страната *BC* ја сече во точка *E*. Точката *E* е поврзана со темето *A*. Пресметај го периметарот на $\triangle AEC$.

Решение. Ако *D* е средина на *AB*, тогаш од $DE \perp AB$, следува дека



$\triangle ABE$ е рамнокрак, со основа *AB*, па затоа $\overline{AE} = \overline{EB}$. Тогаш имаме

$$L_{ACE} = \overline{AC} + (\overline{CE} + \overline{EA}) = 5 + 9 = 14\,cm.$$

Задача 5. Во квадратна шема со димензии 3×3 Димитар може да ги запишува броевите $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$. Дали може Димитар во секое квадратче да запише по еден од овие броеви така што збировите на броевите во трите редици, трите колони и двете дијагонали да се различни меѓу себе.

Решение. Можни збирови на три броја од множеството $\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\}$ се

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

Значи, можни збирови се $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{6},1,\frac{7}{6},\frac{4}{3},\frac{3}{2}$, т.е. вкупно можни збирови се 7, а има вкупно 8 хоризонтали, вертикали и дијагонали. Според принципот на Дирихле, при било какво пополнување на квадратната шема ќе има најмалку два еднакви збира. Значи, такво пополнување не е можно.

VII одделение

Здача 1. Точката M е средина на страната BC на квадратот $ABCD$. Точката S е во внатрешноста на квадратот и е еднаков оддалечена од точките A,D и M. Должината на страната на квадратот е $a=40$ cm. Да се пресмета периметарот и плоштината на четириаголникот $ABMS$.

Решение. Точката S е еднакво оддалечена од точките A и D, па според тоа припаѓа на симетралата на страната DA. Ако N е средина на страната на AD, тогаш точките N,S и M се колинеарни и лежат на симетралата на DA. Отсечката SN е висина во триаголникот ASD.Бидејќи $\overline{MN}=40\ cm$ и $\overline{SM}=x$, добиваме дека $\overline{NS}=\overline{MN}-\overline{SM}=(40-x)cm$. Од правоаголниот триаголник DNS, со страни $x,20,40-x$, според Питагорина теорема, добиваме

$$x^2=20^2+(40-x)^2,\ x=25\ cm.$$

Според тоа, плоштината на трапезот $ABMS$ е еднаква на

$$P=\frac{40+25}{2}\cdot 20\ cm^2=650\ cm^2,$$

а периметарот е еднаков на

$$L=(40+20+25+25)\ cm=110\ cm.$$

Задача 2. Определи ги аглите на триаголникот чии страни a,b и c го задоволуваат равенството

$$a-4\sqrt{bc}+2b=2\sqrt{ac}-3c.$$

Решение. Равенството ќе го запишеме во облик

$$a-2\sqrt{ac}+c+2c-4\sqrt{bc}+2b=0,$$
$$(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{c}+(\sqrt{c})^2+2[(\sqrt{b})^2-2\sqrt{b}\sqrt{c}+(\sqrt{c})^2]=0,$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0.$$

Збир на два ненегативни броја е нула, само ако секој од нив е нула. Според тоа

$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2=0, \tag{1}$$
$$(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0. \tag{2}$$

Квадрат на некој број е нула само ако самиот број е нула. Според тоа, од (1) и (2) добиваме $\sqrt{a}-\sqrt{c}=0$ и $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$, т.е. $\sqrt{a}=\sqrt{c}$ и $\sqrt{b}=\sqrt{c}$. Заради последните равенства, имаме $a=c=b$. Значи, триаголникот е рамностран, па неговите агли се еднакви меѓу себе.

Задача 3. Имаме две свеќи со различни должини и дебелини. Подолгата и потенка свеќа целосно изгорува за 3,5 часа, а пократката и подебела свеќа за 5 часа. Свеќите биле запалени истовремено, а по 2 часа горење нивните должини биле еднакви. За колку проценти потенката свеќа е подолга од подебелата?

Решение.За еден час изгоруваат $\frac{2}{7}$ од првата (подолгата и потенка) свеќа, а $\frac{1}{5}$ од втората (пократката и подебела) свеќа. По два часа изгореле $\frac{4}{7}$ од првата и $\frac{2}{5}$ од втората свеќа. Значи останале $\frac{3}{7}$ од првата и $\frac{3}{5}$ од втората свеќа. Бидејќи тие големини се еднакви, тогаш $\frac{1}{7}$ од првата свеќа е еднаква на $\frac{1}{5}$ од втората свеќа.. Според тоа првата свеќа има должина $7x$, а втората $5x$, па потенката свеќа е за 40% подолга од подебелата свеќа.

Задача 4. Докажи дека за секој природен број n изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

Решение. Бидејќи

$$\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}=\frac{1}{6}n(n^2+3n-4)=\frac{1}{6}n(n^2+3n+2-6)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-n,$$

тогаш бараниот број е секогаш цел како разлика од два цели броеви, затоа што $n(n+1)(n+2)$ е производ од три последователни броеви и е делив со 6.

Задачи 5. Во триаголникот ABC аголот $\measuredangle BAC = 70^\circ$, а аголот $\measuredangle ABC = 50^\circ$. Точката M се наоѓа во $\triangle ABC$ и притоа $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 40^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

Решение. Од условите дадени на цртежот следува:

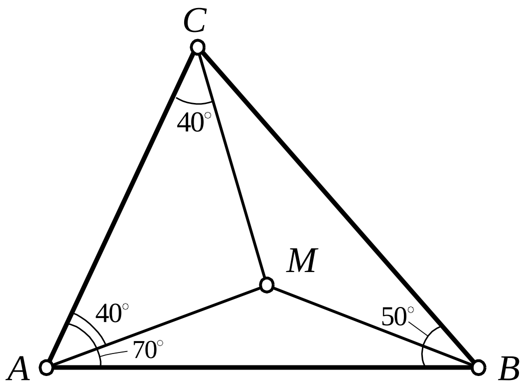
$\measuredangle ACB = 60^\circ$, $\measuredangle AMC = 100^\circ$.

Бидејќи ΔAMC е рамнокрак и

$$\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle AMC = 50^\circ$$

следува дека M е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Оттука имаме:

$\measuredangle AMB = 120^\circ$ и $\measuredangle BMC = 140^\circ$, како централни агли.



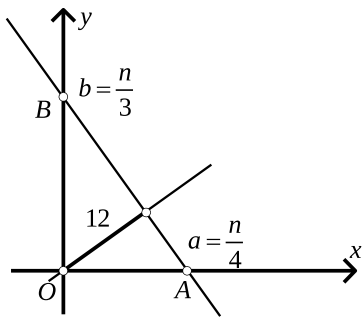
VIII одделение

Задача 1. Во координатната рамнина xOy е дадена права $4x + 3y = n$, $n > 0$ која од координатниот почеток е на растојание 12. Определи ја плоштината на триаголникот што ја гради правата со координатните оски.

Решение. Правата со координатните оски гради правоаголен триаголник со катети $\overline{OA} = a = \frac{n}{4}$ и $\overline{OB} = b = \frac{n}{3}$ (види цртеж). Според тоа должината на хипотенузата е еднаква на

$$\overline{AB} = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{n^2}{16} + \frac{n^2}{9}} = \frac{5n}{12}.$$

Висината повлечена кон хипотенузата е долга $h_c = 12$, од каде добиваме



$$P = \frac{\frac{5n}{12} \cdot 12}{2} = \frac{5}{2}n.$$

Од друга страна $P=\frac{ab}{2}=\frac{n^2}{24}$. Според тоа

$$\frac{n^2}{24}=\frac{5n}{2}.$$

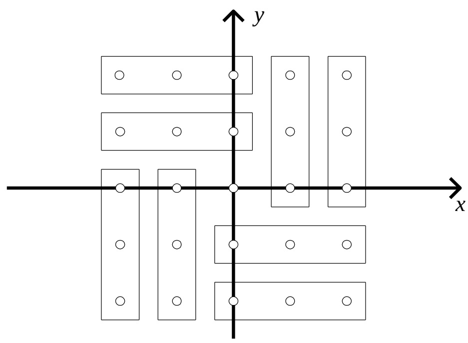
Значи, $n=60$ и $P=150$.

Задача 2. За множеството $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ од правоаголен координатен систем се избрани 17 точки од множеството $S\times S$. Докажи дека постојат три точки A,B,C од избраните, такви што B е средина на отсечката AC.

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

а) Координатниот почеток е во избраните 17 точки. Од преостанатите 24 точки ќе формираме 12 пара точки. Точките од еден пар се централно симетрични во однос на координатниот почеток. Бидејќи бројот на парови е 12 а бројот на избрани точки е поголем од 13 во еден пар двете точки ќе бидат од избраните точки. Координатниот почеток и тие две точки се бараните точки. За B се бира координатниот почеток, а точките од парот се A и C.

б) Координатниот почеток не е во избраните 17 точки.

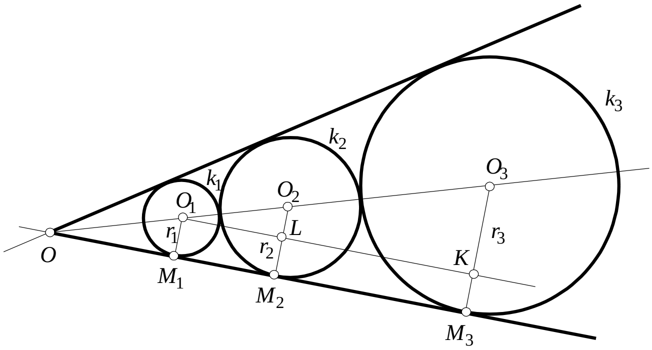


Преостанатите 24 точки ќе ги разбиеме во групи по три точки како на цртежот. Во една од групите, според принципот на Дирихле, имаме три точки од избраните. Навистина, ако претпоставиме спротивно, т.е. дека во секоја група имаме најмногу две точки од избраните 17 точки, тогаш сме избрале не повеќе од 16 точки, контадикција.

Групата од точки во која сите три точки се од избраните се бараните три точки. Средната од нив е B а крајните се A и C.

Задача 3. Нека r_1,r_2,r_3 $(r_1<r_2<r_3)$ се должини на радиуси на кругови k_1,k_2,k_3 кои допираат краци на даден агол. Притоа k_1 и k_2 се допираат, а исто така и k_2 и k_3 се допираат. Докажи дека r_2 е геометриска средина на r_1 и r_3.

Решение.Нека O_1, O_2, O_3 се центри на кружниците k_1, k_2, k_3, а M_1, M_2, M_3се допирни точки на k_1, k_2, k_3 со еден крак на аголот (види цртеж).



Јасно е дека $\overline{O_1M_1} = r_1, \overline{O_2M_2} = r_2, \overline{O_3M_3} = r_3$. Точката K припаѓа на O_3M_3 и $O_1K \parallel M_1M_3$. Точката L е пресечна точка на O_1K со O_2M_2(види цртеж).

Триаголниците O_1LO_2 и O_1KO_3 се слични, од каде добиваме

$$\overline{O_3K} : \overline{O_2L} = \overline{O_1O_3} : \overline{O_1O_2} . \qquad (1)$$

Бидејќи

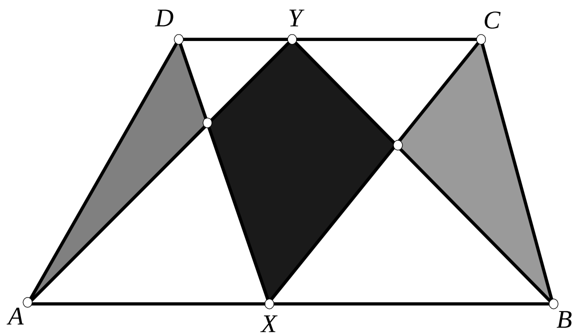
$$\overline{O_3K} = r_3 - r_1,\ \ \overline{O_2L} = r_2 - r_1,\ \ \overline{O_1O_3} = r_1 + 2r_2 + r_3,\ \ \overline{O_1O_2} = r_1 + r_2,$$

ако замениме во (1) добиваме

$$(r_3 - r_1)(r_2 - r_1) = (r_1 + 2r_2 + r_3)(r_1 + r_2) . \qquad (2)$$

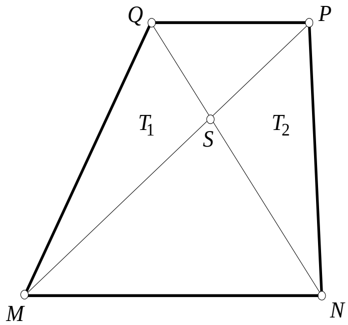
Ако во (2) се ослободиме од загради и добиеното равенство го средиме, добиваме $r_2^2 = r_1 r_3$.

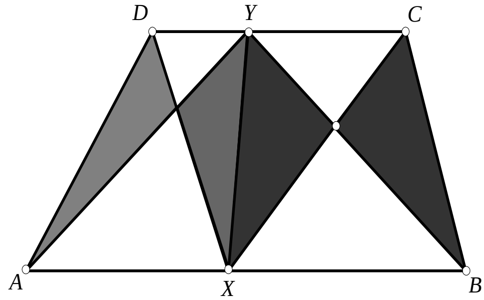
Задача 4. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD. На отсечката AB е избрана произволна точка X, а на отсечката CD произволна точка Y. Повлечени се отсечките CX и DX и отсечките AY и BY. Со овие повлечени отсечки на цртежот се добиваат два триаголници и еден четириаголник (види цртеж; исенчени делови од трапезот). Покажи дека, плоштината на осенчениот



четириаголник е еднаква на збирот на плоштините на исенчените триаголници.

Решение. На почеток ќе разгледаме произволен трапез $MNPQ$ на кој дијагоналите му се сечат во точката S. Нека T_1 е триаголникот MSQ а T_2 триаголникот MPS.





Ќе покажеме дека $P_{T_1} = P_{T_2}$. Јасно е дека $P_{MNQ} = P_{MNP}$, од каде имаме

$$P_{T_1} = P_{MNQ} - P_{MNS} = P_{MNP} - P_{MNS} = P_{T_2}.$$

Ќе ја повлечеме отсечката XY. Сега ќе ги разгледаме трапезите $AXYD$ и $XBCY$ одвоено, од каде следува тврдењето на од задачата.

Задача 5. Марта игра компјутерска игра "Уништи ги балоните". Во секој потег Марта може да уништува точно по $1, 11, 15$ или 27 балони. Притоа на екранот ако уништи 1 балон се појавуваат точно 10 нови балони, ако уништи 11 балони се појавуваат точно 8 нови балони, ако уништи 15 балони не се појавува ниту еден нов балон, и ако уништи 27 балони се појавуваат точно 36 нови балони. Марта победува ако на екранот ги уништи сите балони. Дали ако на почетокот на екранот имало 102 балони, Марта може да победи?

Решение. Марта може да победи, бидејќи еден редослед по кој ќе уништува балони е

$$15, 15, 15, 15, 15, 15, 11, 1, 11, 15.$$

Забелешка. Да забележиме дека во секој чекор разликата на појавени и уништени балони е број кој е делив со 3. Бројот 102 е делив со 3. Не е тешко да се провери дека ако бројот на балоните е број кој не е делив со 3 Марта не може да ги уништи сите балони во произволен број чекори.