

Ристо Малчески
Скопје

ТЕОРЕМА НА ШТАЈНЕР ЗА ТРАПЕЗ

Јакоб Штајнер (18 март 1796 – 1 април 1863 година) бил швајцарски математичар кој првенствено работел геометрија. Штајнер е роден во селото Уценшторф, во кантонот Берн. На 18 години, станал ученик на Јохан Хајнрих Песталоци, а потоа студирал во Хајделберг. Подоцна Јакоб заминал во Берлин каде за егзистенција заработувал со таторство, исто како што правел и во Хајделберг. Во Берлин се запознал со А. Л. Креле, кој охрабрен од неговата способност, го основал својот познат *Журнал* (1826).



По објавувањето на неговиот труд *Систематски разработки* (гер. *Systematische Entwicklungen*) во 1832 година, Штајнер по препорака на Карл Густав Јакоб Јакоби добил почесна диплома на Универзитетот Кенигсберг, кој во тоа време таму бил професор на овој универзитет. Повторно по препорака на Јакоби и на браќата Александар и Вилхелм фон Хумболт во 1834 за Штајнер во Берлин била основана нова катедра по геометрија, каде работел сè до својата смрт.

Повеќе теореми во геометријаа го носат името на Штајнер, но ние во оваа статија ќе докажеме една теорема на Штајнер за трапезот.

Теорема 1. Во трапез $ABCD$ пресечната точка O на дијагоналите AC и BD , средините M и N соодветно на основите AB и BC и пресечната точка P на краците AD и BC се колинерани.

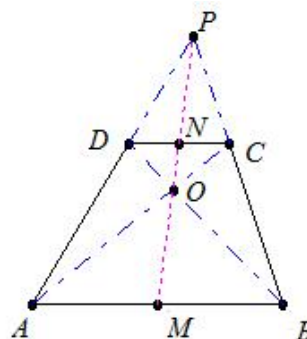
Доказ. За триаголниците ABP и DCP аголот при темето P е заеднички и важи $\angle PDC = \angle PAB$ (агли на транс-ферзала на паралелни прави), па од признакот АА следува дека тие се слични. Оттука следува дека

$$\overline{PD} : \overline{PA} = \overline{DC} : \overline{AB}$$

$$\overline{PD} : \overline{PA} = \frac{\overline{DC}}{2} : \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\overline{PD} : \overline{PA} = \overline{DN} : \overline{AM}$$

и како $\angle PDN = \angle PAM$, триаголниците PDN



и PAM имаат два пара пропорционални страни и аглие меѓу нив се еднакви, па затоа тие се слични. Според тоа, $\angle APM = \angle DPN$, од каде следува дека точките M, N и P се колинеарни.

Од друга страна $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle ABD = \angle CDB$ (агли на трансферза на паралелни прави), па затоа $\triangle ABO \sim \triangle CDO$. Според тоа,

$$\overline{AO} : \overline{CO} = \overline{AB} : \overline{CD}$$

$$\overline{AO} : \overline{CO} = \frac{\overline{AB}}{2} : \frac{\overline{CD}}{2}$$

$$\overline{AO} : \overline{CO} = \overline{AM} : \overline{CN}$$

и како $\angle MAO = \angle NCO$, триаголниците MAO и NCO имаат два пара пропорционални страни и аглие меѓу нив се еднакви, па затоа тие се слични. Од оваа сличност следува $\angle AOM = \angle CON$, па затоа

$$\angle NOC + \angle COM = \angle AOM + \angle COM = 180^\circ,$$

што значи дека точките M, N и O се колинеарни.

Конечно, точките M, N и P се колинеарни и точките M, N и O се колинеарни, па затоа точките M, N, P и O се колинеарни. ■

Задача 1. Збирот на аглие при основата на трапезот е еднаков на 90° . Ако должините на основите се a и b ($a > b$), определи ја должината на отсечката која ги поврзува средините на двете основи.

Решение. Нека трапезот е $ABCD$, $\overline{AB} = a$,

$\overline{CD} = b$ и точките M и N се соодветно

средини на основите AB и CD . Ако правите

AD и BC се сечат во точката P , тогаш од

$\angle BAP + \angle ABP = 90^\circ$ следува дека $\triangle ABP$ е

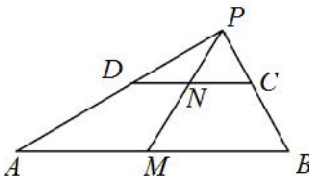
правоаголен и како M е средина на хипотенузата AB , важи $\overline{PM} = \frac{a}{2}$. Но,

$DC \parallel AB$, па затоа и $\triangle DCP$ е правоаголен и како N е средина на хипо-

тенузата CD важи $\overline{PN} = \frac{b}{2}$. Понатаму, според теоремата на Штајнер точ-

ките M, N и P се колинеарни, па затоа

$$\overline{MN} = \overline{PM} - \overline{PN} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}. \blacksquare$$



Задача 2. За $\triangle ABC$ е дадено $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 3$, точка $P \in AB$ таква што $\overline{AP} = 2$, $AL, L \in BC$ е симетрала на $\angle BAC$ и $BN, N \in AC$ е тежишната

линија повлечена од темето B . Докажи дека правите AL, BN, CP се сечат во една точка.

Решение. Отсечката AL е симетрала на $\angle BAC$, па од теоремата за симетралата на агол во триаголник следува

$$\overline{BL} : \overline{CL} = \overline{AB} : \overline{AC} = 6 : 3 = 2$$

(направи цртеж). Понатаму, од условот на задачата имаме

$$\overline{BP} : \overline{PA} = 4 : 2 = 2.$$

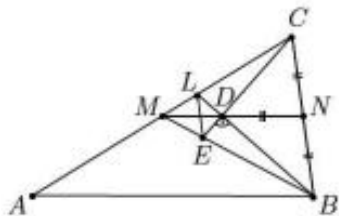
Значи,

$$\overline{BL} : \overline{LC} = \overline{BP} : \overline{PA},$$

па затоа $\triangle ABC \sim \triangle PBL$, од што заради теоремата на Талес следува дека $AC \parallel PL$. Според тоа, четириаголникот $APLC$ е трапез, за кој AL и CP се дијагонали, точката B е пресечната точка на неговите краци и точката N е средина на основата AC . Конечно, од теоремата на Штајнер следува дека правите AL, BN, CP се сечат во една точка. ■

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$), во кој BM и BL ($M, L \in AC$) се соодветно тежишната линија и симетралата на аголот во темето B . Нека правата низ M , паралелна на AB ја сече BL во точка D , а правата низ L , паралелна со BC ја сече BM во точката E . Докажи дека $DE \perp BL$.

Решение. Нека MD ја сече страната BC во точката N . Бидејќи M е средина на AC и $MN \parallel AB$, заклучуваме дека MN е средна линија на $\triangle ABC$. Според тоа, точката N е средина на страната BC . Понатаму, $BC \parallel EL$,



што значи дека четириаголникот $BCLE$ е трапез. Сега, од теоремата на Штајнер, применета на трапезот $BCLE$, следува дека правите MN , BL и CE се сечат во една точка. Но, правите MN и BL се сечат во точката D , па затоа точките C, D и E се колинеарни. Од друга страна BL е симетрала на $\angle ABC$, па затоа

$$\angle NBD = \angle DBA = \angle BDN.$$

Според тоа, $\triangle DBN$ е рамнокрак, со основа BD . Значи, $\overline{DN} = \overline{BN} = \overline{NC}$. Значи, во $\triangle BCD$ должината на тежишната линија повлечена од темето D е еднаква на половина од должината на страната BC , од што следува дека тој е правоаголен со прав агол во темето D . Конечно, $CD \perp BD$, односно $DE \perp BL$, што и требаше да се докаже. ■