Д-р Јудита Цофман
Ерланген, Германија

Користење на табели броеви за одредување на збировите на елементите на некои низи природни броеви

Според познатата анегдота, големиот германски математичар Гаус (1777-1855) како десетгодишно дете, молневито ја решил следната задача:

Да се најде збирот на сите природни броеви од 1 *до* 100.

Гаус при решавањето ја користел следната табела од два реда составена од броевите 1, 2, 3, ..., 100.

$$A_{100}: \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Збирот на броевите во табелата A_{100} можеме да го пресметаме на два начини. Првиот начин се состои во тоа да се пресметаат збировите на броевите во секоја колона: 1+100, 2+99, 3+98, ..., 98+3, 99+2, 100+1 и потоа сите збирови да се соберат. Така се добива бројот

$$(1+100)\cdot 100. \tag{1}$$

Вториот начин за определување на збировите на сите броеви во табелата A_{100} се сведува на тоа да се најдат збировите во секој ред:

1+2+3+...+98+99+100 и 100+99+98+...+3+2+1.

Потоа овие два збира се собираат и се добива

$$2\cdot(1+2+3+\dots+98+99+100). \tag{2}$$

Ако ги изедначиме резултатите од (1) и (2) го добиваме решението на задачата

$$1+2+3+\dots+98+99+100=\frac{(1+100)\cdot 100}{2}=5050.$$

Сега ќе ја воопштиме оваа задача.

Најди формула за пресметување на збирот $1+2+3+\dots+n$.

Задачата ќе ја решиме користејќи ја идејата на Гаус, т.е. користејќи ја табелата

$$A_n: \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-2 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

За збирот A_n на броевите во табелата се добива изразот $(n+1)n$ кога собираме по колони, а потоа ги собереме добиените збирови, и изразот

$2(1+2+3+...+n)$ кога прво ќе собереме по редици и ги собереме добиените збирови. Според тоа, бараната формула е

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3)$$

Целта на нашите разгледувања е да укажеме, како различните табели од природни броеви можат да се искористат за изведување на некои познати формули. Во текстот што следува ќе дадеме неколку такви примери.

Пример 1. Табелата B_n дадена на цртеж 1 се состои од n редици и n колони, т.е. таа содржи n^2 броеви еднакви на 1. Затоа збирот на овие броеви е еднаков на n^2.

1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1

Црт. 1

Ако броевите во табелата ги групираме по "коридори", како што е прикажано на црт. 1, тогаш за збировите во коридорите добиваме: 1, 3, 5, ..., $2n-5, 2n-3$ и $2n-1$. Според тоа, збирот n^2 на сите броеви во табелата B_n може да се изрази како збир на броевите 1, 3, 5, ..., $2n-5, 2n-3$ и $2n-1$. Така ја добиваме формулата

$$1+3+5+...+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)=n^2. \ \blacklozenge \qquad (4)$$

Пример 2. Да се вратиме на табелата A_n. Покажавме дека збирот на броевите во оваа табела е еднаков на $n(n+1)=n^2+n$. Од друга страна, за истиот збир имаме

$$1+2+3+...+(n-1)+n+n+(n-1)+...+3+2+1.$$

Ако од двата последни збира одземеме n добиваме

$$1+2+3+...+(n-1)+n+(n-1)+...+3+2+1=n^2. \ \blacklozenge \qquad (5)$$

Забелешка. До истиот резултат може да се дојде и ако броевите од табелата B_n ги групираме по дијагонали. Обиди се самостојно да го извршиш ова пресметување.

Пример 3. Да ја разгледаме табелата C_n (црт. 2). Повторно ќе ги групираме броевите во табелата на два начина и ќе го пресметаме нивниот збир.

Прво ќе ги групираме собироците по редици како што е прикажано на црт. 2. Збировите на броевите се дадени со следните изрази

$$1+2+3+...+n, 2(1+2+3+...+n), 3(1+2+3+...+n), ..., n(1+2+3+...+n)$$

што значи дека збирот на тие броеви е:

$$(1+2+3+...+n)^2$$

и ако ја искористиме формулата (3) за збирот на броевите во табелата C_n добиваме

$$[\frac{n(n+1)}{2}]^2. \qquad (6)$$

	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	2	4	6	...	$2(n-2)$	$2(n-1)$	$2n$
	3	6	9	...	$3(n-2)$	$3(n-1)$	$3n$
C_n	...	...	...	...	...	...	...
	$n-2$	$2(n-2)$	$3(n-2)$	...	$(n-2)^2$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)n$
	$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	...	$(n-2)(n-1)$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
	n	$2n$	$3n$	...	$(n-2)n$	$(n-1)n$	n^2

Црт. 2

Вториот начин на групирање на броевите од табелата C_n е по коридори, како што е прикажано на црт. 3. Збировите на броевите во овие коридори се:

$$1, 2(1+2+1), 3(1+2+3+2+1),..., n[1+2+...+(n-1)+n+(n-1)+...+3+2+1]$$

	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	2	4	6	...	$2(n-2)$	$2(n-1)$	$2n$
	3	6	9	...	$3(n-2)$	$3(n-1)$	$3n$
	...	...	...	...	...	...	...
C_n	$n-2$	$2(n-2)$	$3(n-2)$	...	$(n-2)^2$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)n$
	$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	...	$(n-2)(n-1)$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
	n	$2n$	$3n$	...	$(n-2)n$	$(n-1)n$	n^2

Црт. 3

Ако ја искористиме формулата (5), тогаш овие збирови можат да се запишат како $1, 2\cdot 2^2, 3\cdot 3^2,..., n\cdot n^2$ односно како $1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3$ па затоа збирот на сите броеви во табелата C_n е еднаков на

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3. \qquad (7)$$

Бидејќи со претходно опишаните групирања собираме исти броеви, од (6) и (7) следува дека

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2. \qquad (8)$$

Коментар. Заради тежината на следниов пример, на учениците им препорачуваме истиот да го разгледуваат во консултација со своите наставници. Доколку некој од учениците се одлучи истиот да не го проучува, пожелно е да ја запамети формулата (11), која наоѓа примена при решавањето на голем број задачи.

Пример 4. Да ја разгледаме табелата D_n, дадена на црт. 4. Во секој ред од оваа табела збирот на броевите е

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

и како имаме n редови добиваме дека збирот S_n на сите броеви во табелата е

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}n=\frac{n^2(n+1)}{2}. \tag{9}$$

Но, збирот S_n може да се определи и на друг начин, со групирање на собирците по дијагонали и вертикални коридори, како што е прикажано на црт. 5. Од ова групирање добиваме

D_n

1	2	3	4	...	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	...	...	$n-1$	n	1
3	4	...	...	...	n	1	2
4	...	$n-2$	$n-1$	...	1	2	3
...	...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	$n-1$	n	1	...	...	$n-4$	$n-3$
$n-1$	n	1	2	...	$n-4$	$n-3$	$n-2$
n	1	2	3	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$

Црт. 4

$$S_n=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+...+(n-1)(n-1)+n\cdot n+1+$$
$$+(1+2)+(1+2+3)+[1+2+...+(n-2)]+[1+2+...+(n-1)]$$

и ако ја искористиме формулата (3), за S_n добиваме

$$\begin{aligned} S_n &=1^2+2^2+3^2+...+n^2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{(2+1)\cdot 2}{2}+\tfrac{(3+1)\cdot 3}{2}+...+\tfrac{[(n-1)+1]\cdot(n-1)}{2} \\ &=1^2+2^2+3^2+...+n^2+\tfrac{1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2}{2}+\tfrac{1+2+3+...+(n-1)}{2} \\ &=\tfrac{3}{2}[1^2+2^2+3^2+...+n^2]-\tfrac{n^2}{2}+\tfrac{n(n-1)}{4}. \end{aligned} \tag{10}$$

D_n

1	2	3	4	...	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	...	...	$n-1$	n	1
3	4	...	...	...	n	1	2
4	...	$n-2$	$n-1$	...	1	...	...
...	$n-2$	$n-1$	n	...			
$n-2$	$n-1$	n	1	...		$n-4$	$n-3$
$n-1$	n	1	2	...	$n-4$	$n-3$	$n-2$
n	1	2	3	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$

Црт. 4

Сега, од формулите (9) и (10) добиваме

$$\frac{3}{2}[1^2+2^2+3^2+...+n^2]-\frac{n^2}{2}+\frac{n(n-1)}{4}=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (11)$$

Забелешка. Постојат и други збирови кои можат да се пресметаат со помош на табели слични на претходно разгледаните. Меѓутоа, истите нема да ги разгледуваме, а на читателите им препорачуваме со помош на веќе најдените формули да ги докажат следните равенства:

а) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+...+(n-1)\cdot n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ и

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Упатство. а) Искористете ги равенствата (8) и (11).

б) Искористете ги равенствата (3) и (8).

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ