**Ристо Малчески,**
**Скопје**

# ПРЕСМЕТУВАЊЕ ЗБИРОВИ ОД ПРОИЗВОДИ И СТЕПЕНИ

Според преданијата, откако научил да игра шах, индискиот владател Сирам заповедал изумителот на играта да биде награден според неговата желба. Мудрецот Сети, за кој според истите преданија постои уверување дека ја измислил оваа генијална игра, "скромно" пред Сирам се обратил со следниве зборови:

- На првото поле да се стави едно зрно пченица, на второто да се стават 2 зрна пченица, на третото – 4 зрна итн., што значи дека на секое поле од шаховската табла бројот на зрната пченица се удвојува во однос на претходното и така добиениот збир од зрна да биде мојата награда.

Сирам, навреден од "скромноста" на Сети, одмавнал со рака со зборовите:

- Дајте му на мудрецот Сети неколку вреќи пченица!

Сети, загадочно се насмеал на оваа надменост на Сирам, се заблагодарил на неговата великодушност и побарал доколку е можно да претстојува во палатата додека ја добие наградата. Се разбира желбата му била исполнета, после што Сети до крајот на живото престојувал во палатата. Но, зошто? Дали Сирам воопшто успеал да ја испорача побараната награда? За колку пченица станува збор?

Како што знаеме шаховската табла има 64 полиња, па според желбата на Сети, тој требало да добие

$$A=1+2+2^2+2^3+...+2^{63} \tag{1}$$

зрна пченица. Одговорот на последното прашање, запишан со број, за прв пат е даден од арапскиот математичар Ал-Бируни (973-1048) во неговата книга "Паметник на минатите поколенија". Тој забележал дека бројот на зрната на $k$ – тото поле е за еден поголем од збирот на бројот на зрната на сите претходни $k-1$ полиња и пресметал дека бројот на зрната кои Сети требало да ги добие е 18446744073709551615, што е количество пченица за чие сместување е потребна композиција вагони со приближна должина колку што е растојанието од Земјата до Месечината.

Во следните разгледувања ќе го пресметаме збирот (1) и ќе изведеме формула за пресметување на слични збирови. Имаме:

$$A=1+2+2^2+2^3+...+2^{63}=1+2\cdot(1+2+2^2+2^3+...+2^{62})$$

$$=1+2\cdot(1+2+2^2+2^3+...+2^{62}+2^{63}-2^{63})$$
$$=1+2\cdot(A-2^{63})=1+2A-2^{64},$$

од каде добиваме $A=2^{64}-1$.

Ќе разгледаме две задачи, за чие решавање ја користиме претходната идеја.

**Задача 1.** Пресметај го збировите:

а) $1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1}+5^n$,

б) $1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1}+3^n$.

**Решение.** а) Ако ја искористиме идејата за наоѓање на бројот на зрната кои Сети требало да ги добие, наоѓаме

$$S=1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1}+5^n=1+5\cdot(1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1})$$
$$=1+5\cdot(1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1}+5^n-5^n)$$
$$=1+5S-5^{n+1},$$

од каде добиваме $S=\frac{5^{n+1}-1}{4}$.

б) На потполно ист начин се добива

$$1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1}+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}.\ \blacksquare$$

**Задача 2.** Пресметај го збирот

$$2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+...++2\cdot3^{2014}.$$

**Решение.** Според задача 1 б), за $n=2014$ добиваме

$$S=2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+...+2\cdot3^{2014}=2\cdot(1+3+3^2+...+3^{2014})$$
$$=2\cdot\frac{3^{2015}-1}{2}=3^{2015}-1.\ \blacksquare$$

Во претходната задача всушност пресметавме збир од видот

$$A=a+ax+ax^2+ax^3+...+ax^{n-1},\ a,x\in\mathbf{R},\ x\neq0,1,\ a\neq0.$$

Во следните разгледувања ќе изведеме формула за пресметување на збирови од овој вид, кога $a,x\neq0$. Јасно, за $x=1$ се добива $A=na$. Нека $x\neq1$. Тогаш

$$A=a+ax+ax^2+...+ax^{n-1}=a+x(a+ax+ax^2+...+ax^{n-2}+ax^{n-1}-ax^{n-1})$$
$$=a+x(A-ax^{n-1})=a(1-x^n)+Ax,$$

од каде наоѓаме $A=a\frac{1-x^n}{1-x}$.

**Задача 3.** Пресметај го збирот: $8+88+888+...+\underbrace{88...88}_{n}$.

**Решение.** Од претходните разгледувања последователни, за $a=x=10$ добиваме

$$
\begin{aligned}
8+88+888+...+\underbrace{88...88}_{n} &= 8\cdot(1+11+111+...+\underbrace{11...11}_{n})\\
&=\frac{8}{9}(9+99+999+...+\underbrace{99...99}_{n})\\
&=\frac{8}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^n-1)]\\
&=\frac{8}{9}(10+10^2+10^3+...+10^n-n)\\
&=\frac{8}{9}(10+10\cdot 10+10\cdot 10^2+...+10\cdot 10^{n-1}-n)\\
&=\frac{8}{9}(10\cdot\frac{1-10^n}{1-10}-n)=\frac{8}{9}(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n)=\frac{8\cdot 10^{n+1}-80-72n}{81}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

**Задача 4.** Пресметај го збирот

$S_n=1+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+...+(1+3+3^2+...+3^{n-1}), n\geq 1$.

**Решение.** Последователно добиваме

$$
\begin{aligned}
S_n &=1+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+...+(1+3+3^2+...+3^{n-1})\\
&=\frac{3-1}{2}+\frac{3^2-1}{2}+\frac{3^3-1}{2}+\frac{3^4-1}{2}+...+\frac{3^n-1}{2}=\frac{3+3^2+3^3+3^4+...+3^n-n}{2}\\
&=\frac{3(1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1})-n}{2}=\frac{3\cdot\frac{3^n-1}{2}-n}{2}=\frac{3^{n+1}-3-2n}{4}.
\end{aligned}
$$

На пример, за $n=5$ добиваме $S_5=\frac{3^6-13}{4}=179$. ■

**Задача 5.** Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^k+2^{k+1}+2^{k+2}+...+2^{k+n}=2^{55}-2^{25}.$$

**Решение.** Од условот на задачата последователно добиваме:

$$2^k(1+2+2^2+...+2^n)=2^{55}-2^{25},$$

$$2^k(2^{n+1}-1)=2^{25}(2^{30}-1).$$

Броевите $2^{n+1}-1$ и $2^{30}-1$ се непарни и како $2^k\,|\,2^{25}(2^{30}-1)$ добиваме $2^k\,|\,2^{25}$. Аналогно, $2^{25}\,|\,2^k$, па затоа $2^{25}=2^k$, од каде следува $k=25$. Според тоа, $2^{n+1}-1=2^{30}-1$, односно $2^{n+1}=2^{30}$, па затоа $n+1=30$, т.е. $n=29$. Конечно, единствено решение на дадената равенка е $k=25, n=29$. ■

Пред да преминеме на следните разгледувања, ќе разгледаме едно равенство чиј доказ следи сосема поинаква идеја.

**Задача 6.** Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

за секој природен број $n$.

**Решение.** Ако искористиме дека

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \text{ за } k=1,2,...,n \qquad (2)$$

добиваме

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}. \ ■$$

**Задача 7.** Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=(1+3+3^2+...+3^7)(\frac{1}{1+2+3+...+1007}+\frac{1}{1+2+3+...+1008}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2013}).$$

**Решение.** Ако ги искористиме познатото равенство

$$1+2+...+m=\frac{m(m+1)}{2}, \text{ за } m=1007,1008,...,2013$$

и разложувањето (2) за $k=1007,1008,...2013$ добиваме

$$A=\frac{3^8-1}{2}(\frac{1}{\frac{1007\cdot 1008}{2}}+\frac{1}{\frac{1008\cdot 1009}{2}}+...+\frac{1}{\frac{2013\cdot 2014}{2}})$$

$$=(3^8-1)(\frac{1}{1007\cdot 1008}+\frac{1}{1008\cdot 1009}+...+\frac{1}{2013\cdot 2014})$$

$$=(3^4-1)(3^4+1)(\frac{1}{1007}-\frac{1}{1008}+\frac{1}{1008}-\frac{1}{1009}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})$$

$$=80\cdot 82\cdot(\frac{1}{1007}-\frac{1}{2014})=\frac{80\cdot 82}{2014}=\frac{3280}{1007}. \ ■$$

**Задача 8*.** Пресметај го збирот:

$$S=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}. \qquad (3)$$

**Решение.** Јасно, за $x=1$ важи

$$S=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Нека $x\neq 1$. Ако (3) го помножиме со $x$ добиваме

$$Sx = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + (n-1)x^{n-1} + nx^n . \qquad (4)$$

Понатаму, од (3) го одземаме (4) и добиваме

$$S - Sx = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{1-x},$$

од каде добиваме

$$S = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}. \blacksquare \qquad (5)$$

**Задача 9*.** Пресметај го збирот:

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n .$$

**Решение.** Ако за $x = 2$ го искористиме равенството (5) последователно добиваме:

$$A = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = 2(2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + ... + n \cdot 2^{n-1})$$
$$= 2(1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + ... + n \cdot 2^{n-1} - 1) = 2(\frac{n \cdot 2^{n+1}-(n+1) \cdot 2^n+1}{(1-2)^2} - 1)$$
$$= 2(n \cdot 2^{n+1} - (n+1) \cdot 2^n + 1 - 1) = 2^{n+1}(2n - n - 1) = 2^{n+1}(n-1). \blacksquare$$

**Забелешка.** Во претходните разгледувања ние всушност главо се задржавме на наоѓање на збирот на првите $n$ членови на геометриска прогресија, т.е. на низата $a, ax, ax^2, ax^3, ..., ax^{n-1}$, $a, x \in \mathbf{R}, x \neq 0,1, a \neq 0$. Оваа низа игра важна улога во многу случаи од нашето секојдневие. Така, на пример, ако во банка вложиме сума од $a$ денари со каматна стапка од $4\%$, тогаш после првата година првобитната сума ќе се зголеми на $1,04$ пати, после втората година оваа сума ќе се зголеми за $1,04$ пати, што значи дека првобитно вложената сума ќе се зголеми за $1,04^2$ пати итн. после 10 години првобитната сума ќе се зголеми за $1,04^{10} \approx 1,48$ пати. Меѓутоа, ако процентот е значително поголем, тогаш крајната сума драстично се зголемува. Така, на пример, ако парите се позајмуваат со камата од 40% камата, тогаш за 10 години сумата која се должи се зголемува околу 30 пати.

## ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Пресметај го збирот: $5 + 55 + 555 + ... + \underbrace{55...55}_{55}$.
2. Упрости го изразот: $88 \cdot (89^{2002} + 89^{2001} + ... + 89^2 + 89 + 1) + 1$.
3. Пресметај го збирот: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{n}{2^{n-1}}$.