

Регионален натпревар 1993

I година

1. Два работника со постојано темпо на работа можат да завршат една работа за 30 дена. По 6 дена заедничка работа, првиот работник се откажува, а вториот ја завршува работата за 40 дена од денот на откажувањето на првиот работник. За колку дена би ја завршил првиот работник истата работа ако тој остане сам по 6 дена заедничка работа?

Решение. Нека првиот работник сам ја завршува целата работа за a дена, а вториот за b дена. Тогаш $x = \frac{1}{a}$ е делот од работата што првиот работник ја завршува за еден ден, а $y = \frac{1}{b}$ е делот од работата што вториот работник ја завршува за еден ден. Бидејќи целата работа двајцата работници ја завршуваат за 30 дена, добиваме дека

$$30x + 30y = 1. \quad (1)$$

Од друга страна, бидејќи по 6 дена заедничка работа, вториот работник работи уште 40 дена за да ја доврши работата, добиваме дека

$$6x + 6y + 40y = 1. \quad (2)$$

Решавајќи го системот линеарни равенки (1) и (2), се добива дека

$$x = \frac{1}{75}, \quad y = \frac{1}{50}, \quad (3)$$

т.е. првиот работник сам целата работа ја завршува за 75 дена, а вториот за 50.

Со z да го означиме бројот на денови потребни првиот работник да ја доврши работата по 6 дена заедничка работа. Тогаш

$$6x + 6y + zx = 1, \quad (4)$$

Заменувајќи ги вредностите на x и y од (3) во (4) се добива $z = 60$. Значи, на првиот работник би му биле потребни 60 дена додатна работа за да ја заврши работата по 6 дена заедничка работа.

2. На една кружница се нанесени 1993 точки при што една од нив е обоена црвено, а сите други сино. Дадените точки определуваат разни многуаголници, впишани во кружницата, при што ако едно од темињата на многуаголникот е црвената точка, многуаголникот е црвен, а ако сите темиња на многуаголникот се сини и многуаголникот е син. Дали постојат повеќе црвени или сини многуаголници и зошто? (При решавањето да не се земаат предвид многуаголниците кај кои што постои сечење на несоседни страни.)

Решение. Да разгледаме еден син многуаголник. Темињата на овој многуаголник заедно со црвеното теме определуваат црвен многуаголник. На овој начин на секој син n -аголник му придружуваме еден црвен $(n+1)$ -аголник. При тоа, различни сини многуаголници определуваат различни црвени многуаголници,

бидејќи добиените црвени многуаголници се разликуваат во своите сини темиња. Значи, постојат барем онолку црвени многуаголници колку што постојат сини. Од друга страна, црвените триаголници не соодветствуваат на наведениот начин на ниту еден син многуаголник, па значи, постојат повеќе црвени многуаголници отколку сини.

3A. Да се определат сите парови цели броеви x и y кои што се решенија на равенката

$$(x + y + 1993)^2 = x^2 + y^2 + 1993^2.$$

Решение. Имаме

$$(x + y + 1993)^2 = x^2 + y^2 + 1993^2,$$

$$x^2 + y^2 + 1993^2 + 2xy + 2 \cdot 1993x + 2 \cdot 1993y = x^2 + y^2 + 1993^2,$$

$$xy + 1993x + 1993y = 0$$

$$(x + 1993)(y + 1993) = 1993^2$$

Имајќи во предвид дека 1993 е прост број, а x и y се цели броеви од последната равенка се добиваат следните шест системи линеарни равенки:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} x + 1993 = 1 \\ y + 1993 = 1993^2 \end{cases} & \begin{cases} x + 1993 = 1993^2 \\ y + 1993 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1993 = 1993 \\ y + 1993 = 1993 \end{cases} & \begin{cases} x + 1993 = -1 \\ y + 1993 = -1993^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1993 = -1993^2 \\ y + 1993 = -1 \end{cases} & \begin{cases} x + 1993 = -1993 \\ y + 1993 = -1993 \end{cases} \end{array}.$$

чи и што решенија се паровите:

$$(-1992, 3970056), (3970056, -1992), (0, 0),$$

$$(1994, -3974042), (-3974042, -1994), (-3986, 3986).$$

4A. Нека $ABCD$ е тристрана пирамида при што сите три агли кај темето D се прави. Да се пресмета висината на пирамидата спуштена од темето D , ако се дадени должините на рабовите $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ и $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$.

Решение. Триаголниците ABD и ACD се складни, бидејќи се правоаголници со теме во D , заедничка катета AD и еднакви хипотенузи $\overline{AB} = \overline{AC}$. Од складноста на овие триаголници, добиваме дека $\overline{BD} = \overline{CD}$. Ќе ја означиме ова должина со x . Триаголникот BCD е правоаголен со теме во D . Според Питагоровата теорема, за неговите страни важи $x^2 + x^2 = (4\sqrt{2})^2$, од каде што се добива $x = 4$.

3

$$2x^2 - xy - 3y^2 = 2x^2 + 2xy - 3xy - 3y^2 = 2x(x+y) - 3y(x+y) = (x+y)(2x-3y).$$

Конечно, добиваме

$$A = \frac{(x+y)^2(x+y+1)}{(x+y)^2(2x-3y)} = \frac{x+y+1}{2x-3y}.$$

4Б. Нека во рамнината е дадена кружница k и на неа се нанесени две дијаметрално спротивни точки A и B . Во рамнината е дадена и точка C која што не лежи на кружницата k ниту на правата AB . Само со помош на линијар да се конструира нормала од точката C кон правата AB .

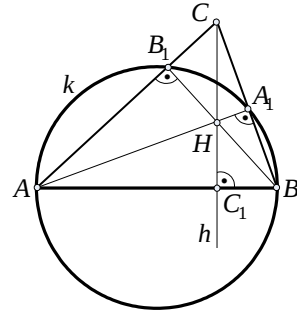
Решение. *Конструкција:* 1° Повлекуваме прави AC и BC ; нека $AC \cap k = B_1$ и $BC \cap k = A_1$.

2° Ги повлекуваме правите AA_1 и BB_1 ; нека $AA_1 \cap BB_1 = H$.

3° Правата CH е бараната нормала.

Доказ. Навистина, по конструкција, точките A_1 и B_1 лежат на кружница k , па, според Талесовата теорема, $\angle AB_1B$ и $\angle AA_1B$ се правоаголници со прави агли во B_1 и A_1 соодветно. Со други зборови, AA_1 и BB_1 се висини на триаголникот ABC спуштени кон страните BC и AC соодветно, па значи точката H е ортоцентарот на триаголникот ABC . Бидејќи правата CH минува низ ортоцентарот на триаголникот ABC и низ темето C , јасно е дека таа е нормална на страната AB на триаголникот ABC .

Досегашната дискусија (а и конструкцијата) важи само ако $A_1 \neq B$ и $B_1 \neq A$. Но, доколку, на пример важи $A_1 = B$, тогаш правата CB е тангентата на кружницата k во точката B , па значи е нормална на дијаметарот AB .



II година

1. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, каде што p е произволен реален параметар. За која вредност на параметарот p важи

$$x_1^4 + x_2^4 = 2 + \sqrt{2}.$$

Решение. Според Виетовите врски имаме

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}.$$

Од друга страна

$$(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 6x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 + x_2^4,$$

од каде што

$$x_2^4 + x_1^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) + 6(x_1 x_2)^2 = 2 + p^4 + \frac{1}{2p^4}.$$

Од равенката

$$2 + p^4 + \frac{1}{2p^4} = 2 + \sqrt{2},$$

добиваме $(p^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p^2})^2 = 0$, т.е. $p = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

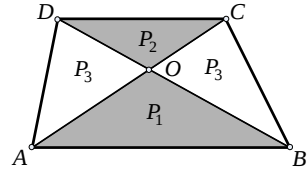
2. Нека O е пресечната точка на дијагоналите на трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$), а P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците ABO и CDO соодветно. Да се изрази плоштината на трапезот $ABCD$ преку плоштините P_1 и P_2 .

Решение. Триаголниците ABC и ABD имаат еднакви плоштини, бидејќи имаат заедничка основа и еднакви висини. Според тоа, од

$$P_{AOD} = P_{ABD} - P_1 \quad P_{BCO} = P_{ABC} - P_1,$$

се добива

$$P_{ADO} = P_{BCO} = P_3.$$



Бидејќи триаголникот ADO и ABO имаат еднакви висини, односот на нивните плоштини е еднаков на односот на нивните основи, т.е.

$$P_3 : P_1 = \overline{OD} : \overline{OB}. \quad (1)$$

Аналогно, за плоштините на триаголниците CDO и CBO важи

$$P_2 : P_3 = \overline{OD} : \overline{OB}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) се добива $P_3 = \sqrt{P_1 P_2}$, па за плоштината на трапезот добиваме

$$P = P_1 + 2P_3 + P_2 = P_1 + 2\sqrt{P_1 P_2} + P_2 = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

3А. Пресметај ја вредноста на збирот

$$S = \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1993},$$

i е имагинарна единица.

Решение. Да ставиме $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Лесно се проверува дека $z^2 = i$. Од тука се добива

$$\begin{aligned} S &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^{1993} \\ &= z(1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{1992}) + (z^2 + z^4 + \dots + z^{1992}) \\ &= z + (z+1)(z^2 + z^4 + \dots + z^{1992}) = z + (z+1)(i + i^2 + \dots + i^{996}) \\ &= z + z(z+1)[(i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \dots + (i-1-i+1)] = z \end{aligned}$$

4А. Нека равенката $ax^2 + bx + c = 0$, каде што $a \neq 0$, нема реални решенија. Да се определи знакот на c , ако се знае дека $a + b + c < 0$.

Решение. Според условот на задачата, квадратната функција

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

нема реални нули, па значи $f(x) < 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ или $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

Но $f(1) = a + b + c < 0$, па значи мора $f(0) = c < 0$.

3Б. Да се упрости изразот

$$A = \left(1 + \frac{1+i}{2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^4\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^8\right),$$

i е имагинарна единица.

Решение. Имаме

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{i}{2}, \quad \left(\frac{1+i}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1+i}{2}\right)^8 = \frac{1}{16},$$

па, значи

$$A = \left(1 + \frac{1+i}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right) = -\frac{255}{256}(1+i).$$

4Б. Да се определат првите 1993 цифри по децималната запирка на бројот $\sqrt{0,9999\dots 9}$, каде што во децималниот запис на бројот под корен се искористени 1993 деветки.

Решение. Да ставиме $a = 0,999\dots 9$. Бидејќи важи $0 < a < 1$, добиваме дека $0 < \sqrt{a} < 1$. Од последните две неравенства се добива

$$0 < a = \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a} < 1,$$

т.е. $0 < a < \sqrt{a} < 1$ од каде што следува дека првите 1993 цифри по децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$ се деветки.

III година

1. Не користејќи таблица ниту калкулатор, да се пресмета остриот агол α ако се знае дека

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + 1) \\ &= (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{2 \sin \frac{105^\circ}{2} \cos \frac{15^\circ}{2}}{2 \sin \frac{15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{15^\circ}{2} \end{aligned}$$

Да забележиме дека при кретењето го користиме фактот што

$$\sin \frac{105^\circ}{2} = \cos(90^\circ - \frac{105^\circ}{2}) = \cos \frac{75^\circ}{2}.$$

Бидејќи α е остар агол и $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 7^\circ 30'$, добиваме $\alpha = 7^\circ 30'$.

2. Да се реши равенката

$$\log_{3x+4}(2x+1)^2 + \log_{2x+1}(6x^2 + 11x + 4) = 4.$$

Решение. За основите на логаритмите да бидат позитивни треба $3x+4 > 0$ и $2x+1 > 0$, од каде што се добива дека $x > -\frac{1}{2}$. За ваквите вредности на x , $2x+1$ и $6x^2 + 11x + 4 = (2x+1)(3x+4)$ се, исто така, позитивни. Значи, равенката е осмислена само за $x > -\frac{1}{2}$. По ред имаме:

$$\log_{3x+4}(2x+1)^2 + \log_{2x+1}(6x^2 + 11x + 4) = 4$$

$$2\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(2x+1)(3x+4) = 4$$

$$\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(3x+4) = 3$$

$$\log_{3x+4}(2x+1) + \frac{1}{\log_{3x+4}(2x+1)} = 3.$$

Воведуваме смена $\log_{3x+4}(2x+1) = t$ и ја добиваме равенката $2t + \frac{1}{t} = 3$, чии што решенија се 1 и $\frac{1}{2}$. Заменувајќи ги овие вредности за t во направената смена, се добиваат решенија за x и тоа $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ и $x_3 = \frac{3}{4}$. Од нив само за третата вредност на x равенката е осмислена. Значи, единственото решение на дадената равенка е $x = \frac{3}{4}$.

3A. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви и $x_1 + x_2 + \dots + x_n > n$. Докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Решение. Нека $x_i = 1 + y_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$. Од тука се добива

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n + y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Од условот $x_1 + x_2 + \dots + x_n > n$ добиваме $y_1 + y_2 + \dots + y_n > 0$.

Од друга страна, за квадратите на x_i важи $x_i^2 = (1 + y_i)^2 = 1 + 2y_i + y_i^2$, (за $i = 1, 2, 3, \dots, n$) па значи

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \\ &\geq n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &\geq n + y_1 + y_2 + \dots + y_n \\ &> x_1 + x_2 + \dots + x_n. \end{aligned}$$

4А. Да се конструира $\triangle ABC$, ако се познати должините $\overline{BC} = a$, $\overline{BB_1} = h_b$ (висината спуштена од темето B , со подножје во B_1) и $\overline{AC} + \overline{AB} = b + c$. Да се изврши дискусија за постоењето на решенија, како и за нивниот број, во зависност од дадените должини.

Решение. *Анализа.* Нека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник. Триаголникот BB_1C може да се конструира, бидејќи е правоаголен триаголник со познати катета и хипотенуза. Точката A лежи на правата $p = CB_1$. На правата CB_1 може да се определи точката D , така што

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = b + c.$$

Да го разгледаме триаголникот BAD . Бидејќи $\overline{AD} = b + c - \overline{CA} = c = \overline{AB}$, добиваме дека триаголникот BAD е рамнокрак со теме во A и основа BD . Значи, темето A лежи на симетралата на страната BD . Од тука следува дека темето A е во пресекот на правата $p = CB_1$ и симетралата на страната BD .

Дискусија. Јасно е дека за да постои решение мора да биде исполнето $h_a \leq a < b + c$ (ова важи за секој триаголник).

Нека $h_a < a < b + c$. Бидејќи точката D можеме да ја конструираме на правата CB_1 мерејќи го растојанието $b + c$ кон точката B_1 , но и во спротивна насока, јасно е дека задачата има две решенија и тоа во првиот случај аголот кај темето C е остар, а во вториот аголот кај темето C е тап.

Ако $h_a = a < b + c$, тогаш бараниот триаголник е правоаголен со теме во C и точките C и B_1 се совпаѓаат. Во овој случај правата p на која што лежат точките A и D се добива како нормала на правата BB_1 во точката B_1 . Понатамошната конструкција е иста како и во претходниот случај, со тоа што е сеедно на која страна ќе го нанесеме растојанието $b + c$ за да ја определиме точката D , т.е. двата добиени триаголници се складни.

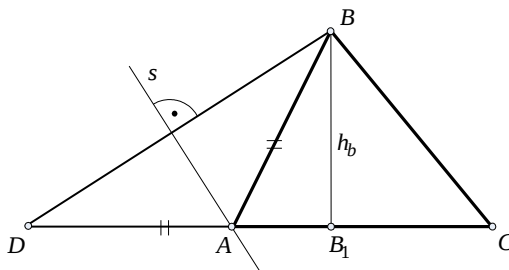
Конструкцијата и доказот се јасни од анализата и дискусијата.

ЗБ. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти при што

$$|P(3)| = |P(7)| = 1.$$

Докажи дека $P(x)$ нема целобројни корени.

Решение. Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, каде што a_i се цели броеви за $0 \leq i \leq n$. Нека b и c се произволни цели броеви. Тогаш



$$P(b) - P(c) = a_n(b^n - c^n) + a_{n-1}(b^{n-1} - c^{n-1}) + \dots + a_1(b - c) = (b - c)M,$$

каде M е цел број. Значи, $b - c$ е делител на $P(b) - P(c)$.

Да претпоставиме дека d е целоброен корен на полиномот $P(x)$. Според претходната дискусија $7 - d$ мора да е делител на $P(7) - P(d) = \mp 1$, од каде што се добива дека $d = 6$ или $d = 8$. Од друга страна, $3 - d$ мора да е делител на $P(3) - P(d) = \mp 1$, од каде што се добива дека $d = 2$ или $d = 4$. Поради ова гледаме дека не постои целоброен корен на полиномот $P(x)$.

4Б. Од произволна точка M , што се наоѓа во внатрешноста на даден остар агол со теме во A , се спуштени нормали MP и MQ кон краците на аголот, при што P и Q лежат на краците на аголот. Од темето A е спуштена нормал AK кон PQ , така што K лежи на правата PQ . Докажи дека $\angle PAK = \angle MAQ$.

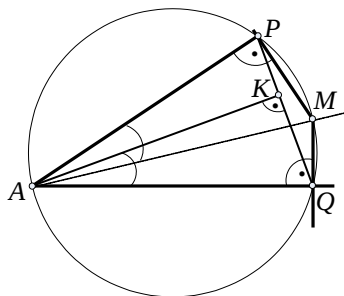
Решение. Нека k е кружница со дијаметар AM . Точките P и Q лежат на кружницата k , бидејќи $\angle APM = \angle AQM = 90^\circ$. Тогаш

1) $\angle MAQ = \angle MPQ$, (како перифериски агли над MQ);

2) $\angle PAK = 90^\circ - \angle APK$; (бидејќи $MP \perp AP$)

3) $\angle MPQ = 90^\circ - \angle APK$; (бидејќи $MP \perp AP$)

Од (2) и (3) следува $\angle PAK = \angle MPQ$, па од 1) имаме $\angle PAK = \angle MAQ$.



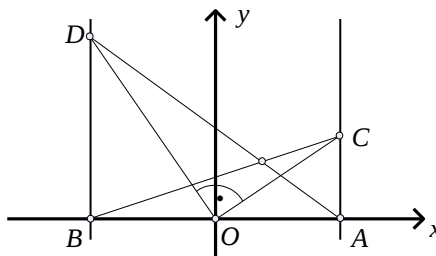
IV година

1. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем со почеток O . Точките A и B се дадени со своите координати $A(a, 0)$ и $B(-a, 0)$, при што $a > 0$. На нормалата на x -оската во A , дадена е произволна точка C , а точката D се наоѓа на нормалата на x -оската во B , така што аголот COD е прав. Да се определи и испита геометриското место на точки определено со пресеците на правите BC и AD .

Решение. Нека равенката на правата OC е $y = kx$, каде што k е произволен параметер. Бидејќи правата OD е нормална на правата OC нејзината равенка е

$$OD: \quad y = -\frac{1}{k}x.$$

Од тука лесно се добиваат координатите на точките C и D , т.е.



$$C(a, ka) \quad \text{и} \quad D(-a, \frac{1}{k}a).$$

Равенките на правите AD и BC се

$$AD: y = -\frac{1}{2k}(x-a) \quad \text{и} \quad BC: y = \frac{k}{2}(x+a). \quad (1)$$

Координатите на точката $AD \cap BC$ се добиваат со решавање на системот (1), што значи меѓусебна зависност на координатите на пресечната точка се добиваат со елиминација на параметарот k од системот (1).

Од равенката на BC се добива $k = \frac{2y}{x+a}$, па со замена на равенката на AD , се добива

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(\frac{a}{2})^2} = 1.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е елипса чија што голема оска е AB , а малата оска е половина од големата.

Од ова елипса треба да се исклучат точките A и B , бидејќи ако пресекот на правите AD и BC лежат на правата AB , тогаш и точките D и C лежат на правата AB , па тогаш аголот COD не може да е прав.

2. Да се најдат оние $x \in [0, 2\pi]$, кои што ја задоволуваат неравенката

$$2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|$$

Решение. Да забележиме прво дека неравенката е осмислена за секоја вредност на x .

Ако $\cos x < 0$, левата страна на неравенката е негативна, а десната е ненегативна, па значи неравенката е задоволена за сите x за кои што $\cos x < 0$, т.е. за сите $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Нека $\cos x \geq 0$, т.е. $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Во тој случај и двете страни на неравенката се негативни, па по квадрирањето насоката на неравенството се менува, и добиваме

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 x &\leq 2 - 2\sqrt{\cos^2 2x} \\ 2 \cos^2 2x &\leq 1 - |\cos 2x| \\ |\cos 2x| &\leq -\cos 2x \end{aligned}$$

Последната неравенка е очигледно задоволена за сите x за кои што $\cos 2x \leq 0$, па водејќи сметка дека $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, добиваме дека $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$.

Заедно со другите решенија (кога $\cos x < 0$), добиваме дека $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

3А. Нека $a_1, a_2, \dots$ е аритметичка прогресија со разлика d . Да се пресмета

$$S_n = a_1^2 + a_4^2 + a_7^2 + \dots + a_{3n-2}^2 - a_2^2 - a_5^2 - \dots - a_{3n-1}^2,$$

т.е. да се изрази S_n преку a_1, d и n .

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} S_n &= a_1^2 + a_4^2 + a_7^2 + \dots + a_{3n-2}^2 - a_2^2 - a_5^2 - a_8^2 - \dots - a_{3n-1}^2 \\ &= a_1^2 - a_2^2 + a_4^2 - a_5^2 + \dots + a_{3n-2}^2 - a_{3n-1}^2 \\ &= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_4 - a_5)(a_4 + a_5) + \dots + (a_{3n-2} - a_{3n-1})(a_{3n-2} + a_{3n-1}) \\ &= -d(a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + \dots + a_{3n-2} + a_{3n-1}) \\ &= -d(a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2} + a_2 + a_5 + \dots + a_{3n-1}) \\ &= -d[(2a_1 + (n-1)3d) \cdot \frac{n}{2} + (2a_2 + (n-1)3d) \cdot \frac{n}{2}] = -dn(2a_1 + (3n-2)d) \end{aligned}$$

4А. Две кружници, со радиуси x и y , кои што се допираат однадвор, ја допираат кружницата $k_1(O_1, R_1)$ однатре во две нејзини дијаметрално спротивни точки.

Кружницата $k(O, R)$ ги допира сите три кружници. Докажи дека:

а) $xy = \frac{RR_1^2}{R+R_1}$

б) $R \leq \frac{R_1}{3}$. Во кој случај се достигнува равенство?

Решение. Нека точките P и Q , кои што лежат на еден дијаметар на k_1 , се центри на двете впишани кружници. Нивните радиуси се x и y , соодветно. Тогаш

$$\begin{aligned} x + y &= R_1, \quad \overline{O_1P} = R_1 - x = y, \quad \overline{O_1Q} = R_1 - y = x, \\ \overline{OP} &= R + x, \quad \overline{OQ} = R + y \text{ и } \overline{O_1O} = R_1 - R. \end{aligned}$$

Имајќи предвид дека

$$\angle PO_1O + \angle QO_1O = 180^\circ,$$

добиваме

$$\cos \angle PO_1O + \cos \angle QO_1O = 0,$$

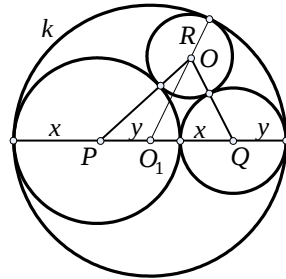
од каде што, користејќи ја косинусната теорема, се добива

$$\frac{(R_1 - R)^2 + y^2 - (R + x)^2}{2y(R_1 - R)} + \frac{(R_1 - R)^2 + x^2 - (R + y)^2}{2x(R_1 - R)} = 0.$$

По средовањето на последниот израз, се добива $xy = \frac{RR_1^2}{R+R_1}$. Користејќи го нера-

венството $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, кое што важи за сите реални броеви (а равенство важи

само за $x = y$). Но, $x + y = R_1$, па затоа $\frac{RR_1^2}{R+R_1} \leq \frac{R_1^2}{4}$, од каде што се добива бараното



неравенство. Равенство важи само во случај кога $x = y$, т.е. двете впишани кружници се еднакви и двете имаат радиуси $\frac{R_1}{2}$.

3Б. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се членови на аритметичка прогресија.

Докажи дека

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

Решение. За произволно $k \geq 1$ важи

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right),$$

Од каде што се добива

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{d} \cdot \frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}. \end{aligned}$$

4Б. За кој природен број n изразот $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg n}{10^n}$ прима најмала вредност?

Решение. Нека $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg n}{10^n} = a_n$. Тогаш $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{\lg n}{10}$. Од тука е јасно дека:

- ако $\frac{\lg n}{10} < 1$, тогаш $a_n < a_{n-1}$
- ако $\frac{\lg n}{10} = 1$, тогаш $a_n = a_{n-1}$ и
- ако $\frac{\lg n}{10} > 1$, тогаш $a_n > a_{n-1}$.

Равенство е исполнето само за $n = 10^{10}$; за $n < 10^{10}$ важи $a_n < a_{n-1}$, а за $n > 10^{10}$ важи $a_n > a_{n-1}$.

Значи, низата $a_1, a_2, \dots$ опаѓа до $n = 10^{10} - 1$, за $n = 10^{10} - 1$ и $n = 10^{10}$ се добиваат еднакви членови, а потоа низата расте. Најмалата вредност на a_n се добива значи за $n = 10^{10}$ и $n = 10^{10} - 1$.