Самоил Малчески, Скопје
Вера Малческа, Германија

ЛАТИНСКИ КВАДРАТИ И БЛОК ДИЗАЈНИ 2

4. БЛОК ДИЗАЈНИ

Дефиниција 5. *Блок-дизајн* е фамилија од b подмножества на множеството $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ таква што да за секои k и λ важи:

а) секое подмножество има k елементи,

б) секој пар елементи од S се појавува во точно λ подмножества.

Подмножествата од множеството S ги нарекуваме *блокови*. Блоковите ќе ги означуваме со $B_1,B_2,...,B_b$. *Матрицата на инциденција* на блок-дизајнот $b\times v-$ матрицата $A=[a_{ij}]$ со елементи од множеството $\{0,1\}$, чии редици соодвествуваат на блоковите, а колоните на елементите на множеството S, при што $a_{ij}=1$ ако и само ако елементот x_j припаѓа на блокот B_i. Притоа, најчесто матрицата ќе ја запишуваме испишувајќи ги нејзините елементи во облик на таблица, без вообичаените загради.

Од условите а) и б) следува точноста на следнава теорема.

Теорема 6. Во блок-дизајнот секој елемент се појавува во точно r блокови, каде

$$r(k-1)=\lambda(v-1) \text{ и } bk=vr. \tag{1}$$

Доказ. Нека a е произволен елемент од S и да претпоставиме дека тој се појавува во r блокови. Секој од овие r блокови содржи $k-1$ елементи различни од a, па затоа бројот на парови елементи на блок-дизајнот кој го содржат a е еднаков на $r(k-1)$. Меѓутоа, постојат $v-1$ елементи со кои a може да биде во пар и секој пар се појавува λ пати. Според тоа,

$$r(k-1)=\lambda(v-1).$$

Но, k,v и λ се дадени броеви, па од последното равенство следува дека за секој елемент од S бројот r мора да е ист.

За најдената вредност r, секој елемент се појавува $r-$ пати во блоковите, па затоа вкупниот број на појавувања на сите елементи е еднаков на vr. Но, секој од блоковите содржи k елементи и како имаме b блокови, добиваме дека бројот на појавувања на сите елементи е еднаков на bk. Значи, $bk=vr$. ♦

Забелешка 1. Имајќи ги предвид петте параметри кои ги карактеризираат блок-дизајните, често пати за блок-дизајн го користиме терминот $(b,v,r,k,\lambda)-$ конфигурација.

Пример 7. Нека

$$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Следниве 12 множества формираат $(12,9,4,3,1)-$конфигурација на S:

$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,4,7\}, \{2,5,8\},\{3,6,9\},\{1,5,9\},\{2,6,7\},$

$\{3,4,8\},\{1,6,8\},\{2,4,9\},\{3,5,7\}$. ♦

Пример 8. Нека $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Да ги разгледаме следниве блокови на множеството S:

$$\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{4,5,7\},$$
$$\{5,6,1\},\{6,7,2\},\{7,1,3\}.$$

Овде важи $b=v=7,k=3$. Со испитување на сите парови лементи лесно се добива дека $\lambda=1$ и дека овие блокови формираат $(7,7,3,3,1)-$конфигурација со матрицата на инциденција

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Блок-дизајнот од претходниот пример има едно својство кое го немаат сите блок-дизајни. Имено, во случајот бројот на елементите е еднаков на бројот на блоковите, па затоа матрицата на инциденција е квадратна матрица. Ваквите дизајни ги нарекуваат *квадратни* или *симетрични дизајни* (што не значи дека матрицата на инциденција е симетрична). Притоа, за симетричната $(b,v,r,k,\lambda)-$конфигурација едноставно ќе велиме дека е $(v,k,\lambda)-$конфигурација.

Како што видовме, петте параметри на $(b,v,r,k,\lambda)-$конфигурацијата ги задоволуваат ограничувањата (1), т.е. тие не се независни. Меѓутоа, ако параметрите ги задоволуваат условите (1), тоа не значи дека постои соодветна конфигурација. Имено, не постои $(44,43,7,7,1)-$ конфигурација иако параметрите ги задоволуваат условите (1).

Теорема 7. Нека A е матрицата на инциденција на конфигурацијата (b,v,r,k,λ), а A^T е нејзината транспонирана матрица. Тогаш

$$C=AA^T=(r-\lambda)E+\lambda I \qquad (2)$$

каде E е единствената матрица од ред v, а I е $v\times v$ матрица чии елементи се еднакви на 1.

Доказ. Елементите во пресекот на $i-$та редица и $j-$та колона на матрицата A^T е $a'_{ij}=a_{ji}$. Елементот во пресекот на $i-$та редица и $j-$та колона на матрицата C е

$$c_{ij}=\sum_{h=1}^{v} a'_{ih}a_{hj}=\sum_{h=1}^{v} a_{hi}a_{hj}$$

за $i=j$ добиваме

$$c_{ii}=\sum_{h=1}^{v} a_{hi}^2=\sum_{h=1}^{v} a_{hi}$$

бидејќи $a_{ij}=0$ или 1, па $a_{ij}^2=a_{ij}$. Меѓутоа, $a_{hi}=1$ ако и само ако $i-$от елемент на множеството $S(x_i)$ е во $h-$от блок, а во спротивно $a_{hi}=0$. Според тоа,

$$c_{ii} = \sum_{h=1}^{v} a_{hi}$$

е еднаков на бројот на блоковите кои содржат x_i, т.е.

$$\sum_{h=1}^{v} a_{hi} = r\ .$$

Ако $i \neq j$, тогаш

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{v} a_{hi} a_{hj}\ .$$

Меѓутоа, $a_{hi}a_{hj} = 1$ ако и само ако $a_{hi} = a_{hj} = 1$, т.е. ако и само ако $h-$от блок ги содржи и x_i и x_j. Ако искористиме дека постојат λ такви вредности h добиваме дека $c_{ij} = \lambda$, т.е.

$$C = A^T A = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & . & . & . & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & . & . & . & \lambda \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & . & . & . & r \end{bmatrix}$$

$$= (r-\lambda)E + \lambda I\ .\ \blacklozenge$$

Теорема 8. За секоја $(b, v, r, k, \lambda)-$ конфигурација важи $b \geq v$.

Доказ. Нека претпоставиме дека за некоја конфигурација (b, v, r, k, λ) важи $b < v$. Матрицата на инциденција A тогаш има помалку редици од колони, па со додавање на $v-b$ редици на матрицата A добиваме квадратна матрица A_1 од ред v. Според претходната теорема, и за матрицата A_1 важи

$$A_1^T A_1 = (r-\lambda)E + \lambda I\ .$$

Бидејќи матрицата A_1 има барем една нулта редица, нејзината детерминанта е еднаква на нула, па затоа

$$\det(A_1^T A_1) = \det A_1^T \bullet \det A_1 = 0\ . \tag{3}$$

Меѓутоа, ако ја одземеме првата редица на матрицата $C = A_1^T A_1$ од сите редици, а потоа додавајќи го на првата колона збирот на останатите колони добиваме

$$A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} r+\lambda(v-1) & \lambda & \lambda & . & . & . & \lambda \\ 0 & r-\lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & r-\lambda & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & r-\lambda \end{bmatrix}$$

од каде добиваме

$$\det(A_1^T A_1) = [r+\lambda(v-1)](r-\lambda)^{v-1} = rk(r-\lambda)^{v-1}.$$

Понатаму, од (1) следува $r > \lambda$ па затоа

$$\det(A_1^T A_1) \neq 0$$

што противречи на (3). Од добиената противречност следува $b \geq v$. $\blacklozenge$

5. МАТРИЦИ НА АДАМАР

Дефиниција 6. Матрицата на Адамар од ред $n\times n$ ја нарекуваме матрица H со елементи од множеството $\{-1,1\}$, за која важи

$$HH^T = nE$$

каде E е единечната матрица од ред n.

Коментар 1. Од претходната дефиниција следува дека скаларниот производ на две различни редици на матрицата H е еднаков на O, т.е. секои две различни редици се заемно ортогонални. Понатаму, производот на секој редица со самата себе е n. Бидејќи

$$H^{-1} = \frac{1}{n}H^T,$$

добиваме дека

$$H^T H = nE,$$

т.е. и колоните на H го имаат наведеното својство.

Лесно се покажува дека со множење на произволна редица или колона на H со -1 се добива нова матрица на Адамар. На овој начин може да се постигне сите елементи во првата редица и првата колона да бидат еднакви на 1. За ваквата матрица на Адамар ќе велиме дека е *нормализирана*. Подолу се дадени нормализирани матрици на Адамар од ред $1, 2, 4$ и 8.

$$1 \qquad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

Шема 1

Теорема 9. Ако постои матрица на Адамар од ред n, тогаш $n=1,\ n=2$ или $n=4m$ за некој природен број m. Притоа, за $n>2$ во секоја редица, освен во првата, на нормализираната матрица на Адамар има ист број елементи 1 и -1.

Доказ. Матриците на Адамар од ред 1 и 2 се дадени во шема 1. Нека претпоставиме дека за $n>2$ постои нормализирана матрица на Адамар од $n-$ти ред. Во првата редица сите елементи се еднакви на 1, па затоа во втората редица мора да има $\frac{n}{2}$ елементи 1 и исто толку елементи -1. Понатаму колоните може да ги пермутираме така да на првите $\frac{n}{2}$ места на втората редица имаме 1. Сега да ја разгледаме третата редица. Нека меѓу првите $\frac{n}{2}$ елементи на оваа редица има a

единици, а меѓу останатите $\frac{n}{2}$ елементи има b единици. Бидејќи првата и третата редица се ортогонални добиваме

$$a+b=\frac{n}{2} \quad (1)$$

Понатаму, бидејќи втората и третата редица се ортогонални добиваме

$$a-(\frac{n}{2}-a)-b+(\frac{n}{2}-b)=0,$$

т.е.

$$a-b=0 \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува $a=b=\frac{n}{2}$, т.е.

$$n=2(a+b)=4a. \ ♦$$

Забелешка 2. Постои хипотеза дека за секој број n делив со 4 постои матрица на Адамар од ред n, која не е докажана. Меѓутоа, од секоја матрица на Адамар, може да се добие нова матрица на Адамар со двапати поголем ред.

Теорема 10. Ако постои матрица на Адамар од ред n, тогаш постои и матрица на Адамар од ред $2n$.

Доказ. За матрицата на Адамар H од ред n ја дефинираме матрицата

$$K=\begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix}.$$

Ќе покажеме дека K е матрица на Адамар.

Бидејќи сите елементи на матрицата K се еднакви на 1 или -1, останува да докажеме дека

$$KK^T=2nE.$$

Навистина, секоја редица на матрицата K (освен првата) содржи по n елементи 1 и -1. Значи, со множење добиваме дека сите дијагонални елементи на матрицата KK^T се еднакви на $2n$. Конечно, од ортогоналноста на редовите на матрицата H следува ортогоналноста на матрицата K. ♦

Забелешка 3. Матриците на шемата 1 се добиени последователно една од друга со конструкција од претходната теорема. Да забележиме дека матрицата од ред 2^n која поаѓајќи од тривијалната матрица од ред 1, се добива со конструкцијата од теоремата 10 ја нарекуваме матрица на Силвестер.

Понатаму, секоја матрица на Адамер ни дава еден симетричен блок-дизајн, што е последица од следново тврдење.

Теорема 11. Ако постои матрица на Адамар од ред $n=4m\geq 8$, тогаш постои и $(4m-1,2m-1,m-1)-$ конфигурација.

Доказ. Нека A е нормализирана матрица на Адамар од $n=4m\geq 8$. Да ја отстраниме првата редица и првата колона на матрицата A, а во преостанатиот дел секаде да го замениме -1 со 0. Добиената матрица B од ред $4m-1$ во секоја редица има $2m-1$ единици и $2m$ нули, а за секои две различни редици постојат точно $m-1$ колони во кои двете редици имаат единици. Според тоа,

$$BB^T=mE+(m-1)I,$$

од каде следува теоремата. ♦

Пример 9. На опишаниот начин во доказот на претходната теорема од матрицата на Адамар од ред 8 (шема 1), ја добиваме $(7,3,1)-$конфигурацијата со следнава матрица на инциденција

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} . \ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека не постои латински квадрат ортогонален на латинскиот квадрат

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

2. Пробните пилоти Александар, Бошко, Владо, Гане и Данило (накратко А,Б,В,Г и Д) во текот во текот на пет денови испитувале пет типови авиони: A, B, C, D и E. Секој пилот летал секој ден на авион од друг тип, така што во текот на петте денови ги испробал сите пет типови авиони. Првиот ден Гане летал на авионот A, вториот ден Владо летал на авионот B, третиот ден Владо летал на авионот C, а Данило на авионот B и четвртиот ден Александар летал на авионот A, а Гане на авионот D.
   а) На кој авион летал Александар првиот ден?
   б) Кој пилот управувал соо авионот D вториот ден?
3. На колку начини латинскиот 2×5 правоаголник

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$$

   може да се прошири за еден ред?
4. На колку начини латинскиот $(n-1)\times n-$ правоаголник може да се прошири до латински квадрат?
5. Докажи дека се изотопни латинските квадрати

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}.$$

6. а) Докажи дека се изотопни латинските квадрати

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

   б) Докажи дека се изотопни латинските квадрати

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array}.$$

7. Нека со цртеж 2 е дадена таблица 5×5 при што во некои полиња се изпишани броеви од множеството $\{1,2,3,4,5\}$, така да во секоја редица и секоја колона запишаните броеви се различни

2	1			
			3	4
				3
1				

цртеж 2

На колку начини оваа таблица може да се дополни до латински квадрат.

8. Докажи дека таблицата од цртеж 3 не може да се пополни до латински квадрат со елементите $\{1,2,3,4,5\}$. Но, ако во долниот десен агол се избрише елементот 3 се добива таблица која еднозначно може да се дополни до латински квадрат

	4			1
2		3		
		2		
	1			3

цртеж 3

9. На колку различни начини латинскиот 2×4 правоаголници

а) $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$ б) $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$

може да се прошират до латински квадрати?

10. Докажете дека не постои $(18,8,3,2,1)-$ конфигурација.
11. Најди го збирот на сите елементи во нормализираната матрица на Адамар од ред n.
12. Нека A е матрица на Адамар од ред n. Докажи дека $|\det A| = n^{\frac{n}{2}}$.
13. Докажи дека ако постојат матриците на Адамар од ред 16 и 20, тогаш постои бинарен $(35,32,17)-$код.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ