

ММО 1997

1. Определи го најмалиот природен број n за кој збирот на цифрите на бројот n е делив со 1997 и збирот на цифрите на бројот $n+1$ е делив со 1997.

2. Нека M е точка во внатрешноста на триаголникот ANC и нека P, Q и R се пресечните точки на AM и BC , BM и AC , CM и AB . Докажи го неравенството

$$\frac{AM}{MP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CM}{MR} \geq 8.$$

3. Определи го бројот на сите триаголници чии должини на страни се помали или еднакви на $2n, n \in \mathbb{N}$.
4. Докажи дека од било кои n реални броеви може да се изберат неколку (може да биде и еден) така што за збирот S на избраните броеви постои цел број P таков шт

$$(n+1) \cdot |S - P| \leq 1.$$

5. Дадена е квадратна мрежа $1997 \cdot 1997$, од која е отстрането централното 1×1 квадратче и фигури $\Gamma_i, i = 2, 3, \dots, 1997$ од видот како на цртежот десно. Нека a е бројот на начините на кои дадената фигура може да се покрие со фигурите $\Gamma_i, i = 2, 3, \dots, 1997$. Определи го најголемиот прост број p таков што $p^3 | a$. (Покривањата се без преклопувања.)

