вторник, 15. јули 2025

Задача 1. Права во рамнината се нарекува *сончева* ако **не** е паралелна на x-оската, y-оската, ниту на правата $x + y = 0$.

Даден е природен број $n \geqslant 3$. Определи ги сите ненегативни цели броеви k такви што постојат n различни прави во рамнината кои ги задоволуваат следните тврдења:

- за секои позитивни цели броеви a и b за кои $a + b \leqslant n + 1$, точката (a, b) лежи на барем една од правите; и
- точно k од n-те прави се сончеви.

Задача 2. Нека Ω и Γ се кружници со центри M и N, соодветно, така што радиусот на Ω е помал од радиусот на Γ. Кружниците Ω и Γ се сечат во две различни точки A и B. Правата MN ја сече Ω во C, а Γ во D, така што точките C, M, N и D се во овој редослед на правата. Нека P е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ACD. Правата AP ја сече Ω по втор пат во $E \neq A$. Правата AP ја сече Γ по втор пат во $F \neq A$. Нека H е ортоцентарот на триаголникот PMN.

Докажи дека правата низ H која е паралелна на AP е тангента на опишаната кружница околу триаголникот BEF.

(*Ортоцентар* на триаголник е пресечната точка на неговите висини.)

Задача 3. Со $\mathbb{N}$ го означуваме множеството од позитивни цели броеви. Функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ се нарекува *бонза* ако

$$f(a) \text{ е делител на } b^a - f(b)^{f(a)}$$

за секои позитивни цели броеви a и b.

Определи ја најмалата реална константа c таква што $f(n) \leqslant cn$ за сите бонза функции f и сите позитивни цели броеви n.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

среда, 16. јули 2025

Задача 4. *Вистински делител* на позитивен цел број N е секој позитивен делител на N различен од N.

Бесконечната низа $a_1, a_2, \ldots$ се состои од позитивни цели броеви, кои имаат најмалку три вистински делители. За секој $n \geqslant 1$, целиот број a_{n+1} е еднаков на збирот од трите најголеми вистински делители на a_n.

Определи ги сите можни вредности на a_1.

Задача 5. Ана и Блаже ја играат *играта на коалата* - игра со два играчи чии правила зависат од позитивен реален број λ, што го знаат двата играчи. Во n-тиот круг од играта (почнувајќи со $n = 1$) се игра:

- Ако n е непарен, Ана одбира ненегативен реален број x_n таков што
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Ако n е парен, Блаже одбира ненегативен реален број x_n таков што
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ако некој играч не може да одбере број x_n кој го задоволува соодветното неравенство, играта завршува и другиот играч победува. Ако играта се игра до бесконечност, никој не победува. Сите одбрани броеви се познати на двата играчи.

Определи ги сите вредности на λ за кои Ана има победничка стратегија и сите вредности на λ за кои Блаже има победничка стратегија.

Задача 6. Разгледуваме мрежа од 2025×2025 единечни квадратчиња. Матилда сака да постави правоаголни плочки на мрежата, може со различни димензии, така што секоја страна од секоја плочка лежи на линија од мрежата и секое единечно квадратче е покриено со најмногу една плочка.

Определи го минималниот број на плочки кои Матилда треба да ги постави така што во секој ред и секоја колона од мрежата останува по точно едно единечно квадратче кое не е покриено од ниту една плочка.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

Tuesday, 15 July 2025

Problem 1. A line in the plane is called *sunny* if it is **not** parallel to any of the x-axis, the y-axis, and the line $x + y = 0$.

Let $n \geqslant 3$ be a given integer. Determine all nonnegative integers k such that there exist n distinct lines in the plane satisfying both of the following:

- for all positive integers a and b with $a + b \leqslant n + 1$, the point (a, b) is on at least one of the lines; and
- exactly k of the n lines are sunny.

Problem 2. Let Ω and Γ be circles with centres M and N, respectively, such that the radius of Ω is less than the radius of Γ. Suppose circles Ω and Γ intersect at two distinct points A and B. Line MN intersects Ω at C and Γ at D, such that points C, M, N and D lie on the line in that order. Let P be the circumcentre of triangle ACD. Line AP intersects Ω again at $E \neq A$. Line AP intersects Γ again at $F \neq A$. Let H be the orthocentre of triangle PMN.

Prove that the line through H parallel to AP is tangent to the circumcircle of triangle BEF.

(The *orthocentre* of a triangle is the point of intersection of its altitudes.)

Problem 3. Let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers. A function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is said to be *bonza* if

$$f(a) \text{ divides } b^a - f(b)^{f(a)}$$

for all positive integers a and b.

Determine the smallest real constant c such that $f(n) \leqslant cn$ for all bonza functions f and all positive integers n.

Wednesday, 16 July 2025

Problem 4. A *proper divisor* of a positive integer N is a positive divisor of N other than N itself.

The infinite sequence $a_1, a_2, \ldots$ consists of positive integers, each of which has at least three proper divisors. For each $n \geqslant 1$, the integer a_{n+1} is the sum of the three largest proper divisors of a_n.

Determine all possible values of a_1.

Problem 5. Alice and Bazza are playing the *inekoalaty game*, a two-player game whose rules depend on a positive real number λ which is known to both players. On the n^{th} turn of the game (starting with $n = 1$) the following happens:

- If n is odd, Alice chooses a nonnegative real number x_n such that
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- If n is even, Bazza chooses a nonnegative real number x_n such that
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

If a player cannot choose a suitable number x_n, the game ends and the other player wins. If the game goes on forever, neither player wins. All chosen numbers are known to both players.

Determine all values of λ for which Alice has a winning strategy and all those for which Bazza has a winning strategy.

Problem 6. Consider a 2025×2025 grid of unit squares. Matilda wishes to place on the grid some rectangular tiles, possibly of different sizes, such that each side of every tile lies on a grid line and every unit square is covered by at most one tile.

Determine the minimum number of tiles Matilda needs to place so that each row and each column of the grid has exactly one unit square that is not covered by any tile.