Сојузен натпревар 1989

I година

1. Нека x,y,z се позитивни броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\geq 64.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако го искористиме равенството $x+y+z=1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) &= \frac{x+x+y+z}{x}\cdot\frac{y+x+y+z}{y}\cdot\frac{z+x+y+z}{z}\\ &\geq \frac{1}{xyz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2}=64.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

2. Нека $x_1,x_2,...,x_{1990}$ се природни броеви такви што

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{1989}^2=x_{1990}^2.$$

Докажи дека најмалку два од овие броеви се парни.

Решение. а) Нека претпоставиме дека броевите $x_1,x_2,...,x_{1990}$ се непарни. Да забележиме дека ако $n=2k+1$, тогаш

$$n^2=4k(k+1)+1\equiv 1(\mathrm{mod}\,8).$$

Затоа

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{1989}^2\equiv 1989\equiv 5(\mathrm{mod}\,8) \text{ и } x_{1990}^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8),$$

што е противречност.

б) Нека претпоставиме дека точно еден од броевите $x_1,x_2,...,x_{1990}$ е парен. Ако тоа е бројот x_{1990}, тогаш секој од броевите $x_1,x_2,...,x_{1989}$ е непарен, па затоа е непарен и збирот на нивните квадрати, што е противречност. Нека точно еден од броевите $x_1,x_2,...,x_{1989}$ е парен, а бројот x_{1990} е непарен. Тогаш е парен и збирот $x_1^2+x_2^2+...+x_{1989}^2$, а бројот x_{1990}^2 е непарен, што повторно е противречност

3. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени страните $BC=a$, $CA=b$ и важи $\measuredangle CAB=3\measuredangle ABC$.

Решение. *Анализа.* Нека триаголникот ABC е таков што

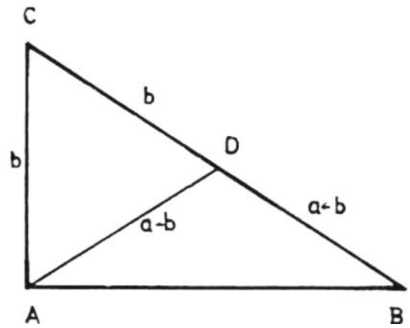
$$BC=a,\ CA=b \text{ и } \measuredangle CAB=3\measuredangle ABC.$$

Тогаш $a>b$. Со D да ја означиме точката на отсечката BC за која важи

$$\measuredangle DAB=\frac{1}{3}CAB=\measuredangle ABC.$$

Тогаш $DA=DB$, а како е

$$\measuredangle CAD = 2\measuredangle ABC$$
$$= \measuredangle ABC + \measuredangle BAD$$
$$= \measuredangle ADC,$$



добиваме дека $CD = CA = b$. Затоа
$$DA = DB = a - b.$$

Конструкција. Го конструираме триаголникот ADC за кој важи $CD = CA = b$ и $DA = a - b$. Потоа на полуправата CD конструираме точка B таква што $CB = a$. Триаголникот ABC е бараниот триаголник.

Доказот и дискусијата му ги препуштаме на читателот за вежба.

4. Определи ги сите природни броеви n за кои важи:
$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{n}] = 2n.$$

Решение. Нека $a_k = [\sqrt[3]{k}] - 2$, за $k = 1, 2, 3, \ldots$. Треба да ги определиме сите природни броеви n за кои $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Да забележиме дека
$$a_k = -1, \quad 1 \le k \le 7,$$
$$a_k = 0, \quad 8 \le k \le 26,$$
$$a_k = 1, \quad 27 \le k \le 63,$$
$$a_k \ge 2, \quad k \ge 64.$$
Јасно, збирот $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ е еднаков на 0 ако и само ако $n = 7 + 26 = 33$.

II година

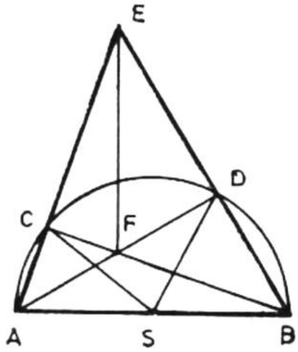
1. Дадена е полукружница над дијаметар AB и на неа точки C и D такви што:

а) точката C припаѓа на лакот AD,

б) $\measuredangle CSD$ е прав, каде S е средина на отсечката AB.

Нека E е пресекот на правите AC и BD, а F е пресекот на правите AD и BC. Докажи дека векторот $\overrightarrow{EF}$ не зависи од изборот на точката C и D.

Решение. Бидејќи C и D припаѓаат на полукружницата над дијаметарот AB, важи
$$AD \perp BD, \; AC \perp BC.$$
Затоа точката F е ортоцентар на триаголникот ABE (цртеж десно). Според тоа, $EF \perp AB$. Бидејќи $\measuredangle CSD = 90^\circ$, добиваме $\measuredangle CAD = 45^\circ$. Значи, триаголникот ACF е рамнокрак правоаголен триаголник, па затоа $AC = CF$. Освен тоа, $\measuredangle ECF =$



$\measuredangle BCA = 90^\circ$ и $\measuredangle EFC = \measuredangle BAC$ (агли со нормални краци). Според тоа, триаголниците ECF и BCA се складни, па следува $EF = AB$.

2. Ако $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$, докажи дека

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)} .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $x \geq 1, y \geq 1$. Тогаш последователно добиваме:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}-1)^2 \geq 0,\\
&xy-x-y+2-2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1} \geq 0,\\
&xy \geq x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+y-1,\\
&xy \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})^2,\\
&\sqrt{xy} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}=1$, т.е. ако и само ако $xy = x + y$.

Од неравенството (1) следува

$$\begin{aligned}
\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} &\leq \sqrt{ab}+\sqrt{c-1}\\
&= \sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\\
&\leq \sqrt{c(ab+1)}.
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $ab = a + b$ и $(ab+1)c = ab+1+c$, т.е. ако и само ако $abc-1 = ab = a+b$.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $x^y - 2^z = 1$.

Решение. Нека (x, y, z) е подредена тројка цели броеви за кои важи $x^y - 2^z = 1$. Лесно се гледа дека не е можно $y \leq 0$ и дека за $y = 1$ секоја тројка

$$(2^z+1,1,z), \text{ каде } z \in \{0,1,2,...\}$$

е решение на дадената равенка. Нека $y > 1$. Тогаш $|x| > 1, z > 1$, а освен тоа x е непарен број и важи

$$(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+...+x+1) = 2^z .$$

Сега, бидејќи $x^{y-1}+x^{y-2}+...+x+1$ е парен број, а сите собирци се непарни, заклучуваме дека $y-1 = 2k+1$, каде k е ненегативен цел број, па затоа

$$(x-1)(x+1)(x^{y-2}+x^{y-4}+...+1) = 2^z .$$

Бројот $(x-1)(x+1)$ е степен на бројот 2 со природен експонент, ако и само ако $x \in \{-3,3\}$. За $x = 3$ добиваме

$$9^k + 9^{k-1} + ... + 1 = 2^{z-3},$$
$$2^z = 9^{k+1} - 1 = (3^{k+1} - 1)(3^{k+1} + 1),$$
од каде добиваме $k = 0, y = 2, z = 3$, т.е. решение е тројката $(3,2,3)$. За $x = -3$ го добиваме решението $(-3,2,3)$.

4. Дадени се заемно прости природни броеви m и n. Во секое поле на бесконечна шаховска табла запишан е по еден реален број, така што важи: збирот на броевите во секој правоаголник $m \times n$ или $n \times m$ е еднаков на нула. Докажи дека барем два од запишаните броеви се еднакви меѓу себе.

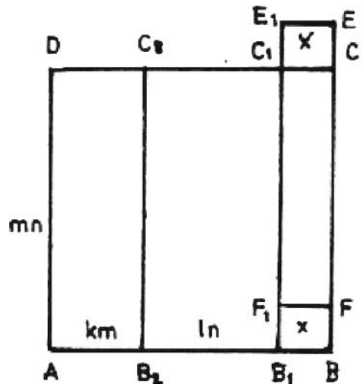
Решение. Бидејќи m и n се заемно прости броеви, при делење на броевите

$$m, 2m, ..., (n-1)m$$

се добиваат сите остатоци $1, 2, ..., n-1$. Според тоа, за некој $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ бројот $km+1$ е делив со n, па затоа бројот $mn-(km+1)$ е делив со n, т.е.

$$mn - 1 = km + nl,$$

каде l е природен број.



На шаховската табла да воведеме правоаголен координатен систем, така што точките со целобројни координати се темињата на полињата на таблата. Квадратот $ABCD$, каде $A(0,0), B(mn,0), C(mn,mn), D(0,mn)$, цртеж десно, може да се разбие на правоаголници со димензии $m \times n$ или $n \times m$. Затоа збирот на броевите кои се запишани внатре во квадратот е еднаков на нула. Да ги воведеме ознаките

$$B_1(mn-1,0), B_2(km,0), C_1(mn-1,mn), C_2(km,mn).$$

Тогаш секој од правоаголниците AB_2C_2D и $B_2B_1C_1C_2$ може да се разбие на правоаголници со димензии $m \times n$ или $n \times m$. Затоа збирот на сите броеви кои се запишани внатре во правоаголникот $AB_1C_1D_1$ е еднаков на нула, од што следува дека збирот на сите броеви кои се запишани внатре во правоаголникот B_1BCC_1 е еднаков на нула. Аналогно докажуваме дека истото својство го има и правоаголникот FEE_1F_1, каде

$$F(mn,1), F_1(mn-1,1), E(mn,mn+1), E_1(mn-1,mn+1).$$

Според тоа, во полињата BFF_1B_1 и CEE_1C_1 е запишан ист број.

III и IV година

1. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки:

$$x_1+x_2^2+x_3^3=3,$$
$$x_2+x_3^2+x_4^3=3,$$
$$x_3+x_4^2+x_1^3=3,$$
$$x_4+x_1^2+x_2^3=3.$$

Решение. Нека четворката (x_1,x_2,x_3,x_4) позитивни реални броеви е решение на дадениот систем равенки.

а) Нека претпоставиме дека барем два од броевите x_1,x_2,x_3,x_4 се еднакви на 1. Бидејќи секои две непознати истовремено се појавуваат барем во една равенка, лесно добиваме дека и другите две непознати се еднакви на 1.

б) Да претпоставиме дека точно еден од броевите x_1,x_2,x_3,x_4 е еднаков на 1. Нека, на пример, $x_1=1$. Ако $x_2<1$, тогаш од првата равенка следува $x_3>1$, а потоа од третата следува $x_4<1$ и на крајот од четвртата следува $x_4>1$, што е противречност. Ако $x_2>1$, тогаш од првата, третата и четвртата равенка редоследно добиваме $x_3<1$, $x_4>1$ и $x_2<1$, што повторно е противречност.

в) Да претпоставиме дека ниту еден од броевите x_1,x_2,x_3,x_4 не е еднаков на 1. Нека, на пример, $x_1<1$. Можни се следниве четири случаи.

в1) $x_2>1, x_3>1$. Тогаш од втората равенка следува $x_4<1$, па затоа

$$3=x_3+x_4^2+x_1^3<x_3^3+x_2^2+x_1=x_1+x_2^2+x_3^3=3,$$

што е противречност.

в2) $x_2>1, x_3<1$. Тогаш од третата равенка следува $x_4>1$. Нека

$x_1=1-a, x_2=1+b, x_3=1-c, x_4=1+d$, каде $0<a<1, 0<c<1, b>0, d>0$.

Тогаш

$$\begin{aligned}0&=x_2+x_3^2+x_4^3+x_4+x_1^2+x_2^3-x_1-x_2^2-x_3^3-x_3-x_4^2-x_1^3\\&=(a^3-2a^2+2a)+(b^3+2b^2+2b)+(c^3-2c^2+2c)+(d^3+2d^2+2d)>0,\end{aligned}$$

бидејќи $2a>2a^2$ и $2c>2c^2$, што е противречност.

в3) $x_2<1, x_3>1$. Тогаш од четвртата равенка следува $x_4>1$, па затоа

$$3=x_4+x_1^2+x_2^3<x_4^3+x_3^2+x_2=x_2+x_3^2+x_4^3=3$$

што е противречност.

в4) $x_2<1, x_3<1$. Тогаш $x_1+x_2^2+x_3^3<3$, што е противречност.

Според тоа, во множеството позитивни броеви единствено решение на дадениот систем е $(1,1,1,1)$.

2. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти таков што за секој реален x важи $P(x)\geq 0$.

Докажи дека постојат полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ со реални коефициенти, такви што за секој реален број x важи

$$P(x)=Q^2(x)+R^2(x).$$

Решение. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се сите реални нули на полиномот $P(x)$, а $z_1,z_2,...,z_m$ се сите комплексни нули на полиномот $P(x)$ кои имаат позитивен имагинарен дел, при што секоја нула е запишана онолку пати колку што е нејзината кратност. Бидејќи полиномот $P(x)$ не го менува знакот на множеството реални броеви, заклучуваме дека кратноста на секоја реална нула е парен број. Затоа важи

$$\begin{aligned}P(x)&=Q_1^2(x)(x-z_1)...(x-z_m)(x-\overline{z_1})...(x-\overline{z_m})\\&=Q_1^2(x)(u+iv)(u-iv)\\&=Q_1^2(x)(u^2+v^2)\\&=(uQ_1)^2+(vQ_1)^2.\end{aligned}$$

3. Определи го бројот на подредените тројки (A,B,C) за кои важи:

а) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,...,n\}$,

б) $A\cap B\cap C=\varnothing$,

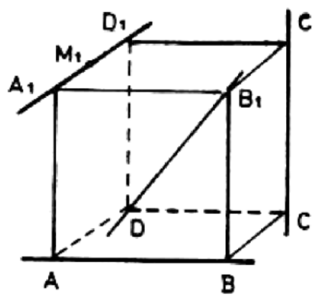
в) $A\cap B\neq\varnothing$.

Решение. Ако за подредената тројка (A,B,C) важат дадените услови, тогаш секој од броевите $1,2,...,n$ се наоѓа во едно од следниве шест дисјунктни множества

$$A\cap\overline{B}\cap\overline{C},\ \overline{A}\cap B\cap\overline{C},\ \overline{A}\cap\overline{B}\cap C,\ A\cap B\cap\overline{C},\ A\cap\overline{B}\cap C,\ \overline{A}\cap B\cap C,$$

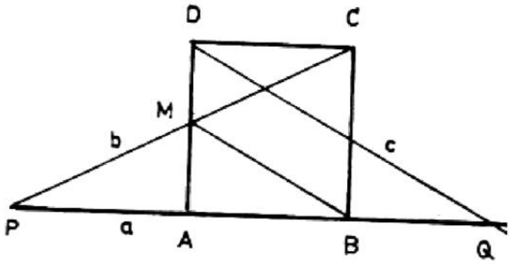
при што барем еден од овие елементи се наоѓа во множеството $A\cap B\cap\overline{C}$. Бројот на распоредите на n елементи во наведените шест дисјунктни множества е еднаков на 6^n. Бројот на распоредите кај кои $A\cap B\cap\overline{C}=\varnothing$ е еднаков на 5^n. Затоа бараниот број распореди е еднаков на 6^n-5^n.

4. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Дали постои права која ја сече секоја од правите AB, CC_1, A_1D_1, DB_1?



Решение. Да претпоставиме дека постои права која ја сече секоја од правите AB, CC_1, A_1D_1, DB_1 (цртеж десно). Оваа права да ја означиме со n, со M_1 да го означиме нејзиниот пресек со правата A_1D_1, а со M нормалната проекција на точката M_1 на рамнината $ABCD$. Тогаш правата n е заедничка за рамнините M_1AB, M_1CC_1 и M_1DB_1, па пресечните прави $a = AB, b = MC$ и c, редоследно, на овие рамнини со рамнината $ABCD$ имаат заедничка точка. Таа точка е пресекот на правата n и рамнината $ABCD$. Правата c е определена со условите $D \in c$, $c \parallel M_1B_1 \parallel MB$, бидејќи c и M_1B_1 се пресеци на рамнината MDB_1 со паралелните рамнини $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Меѓутоа, лесно се докажува дека правите a, b, c немаат заедничка точка. Со P и Q да ги означиме пресеците на правата a со правите b и c, соодветно. Ако $A-M-D$, т.е. ако точката M е меѓу точките A и D, тогаш $P-A-Q$, види цртеж. Ако е



$A-D-M$, тогаш е $Q-B-P$. Ако е $D-A-M$, тогаш е $Q-A-P$. Ако $M = D$, тогаш $a \parallel b$, а ако е $M = A$, тогаш е $c = CD \parallel AB = a$. Според тоа, не постои права која ја сече секоја од правите AB, CC_1, A_1D_1, DB_1.