Сојузен натпревар 1985

Седмо одделение

1. Докажи дека за секој прост број поголем од 3 производот на неговите соседни броеви е делив со 24.
   Решение. Секој прост број поголем од 3 е непарен, па неговите соседни броеви се два последователни парни броеви. Затоа едниот од нив е делив со 4. Овие два парни броја и дадениот прост број се три последователни броеви, што значи дека еден од двата парни броја е делив со 3. Конечно, производот на овие два соседни парни броја е делив со $2\cdot 4\cdot 3=24$.

2. Јанез во 1986 година ќе наполни онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината кога се родил. Колку години ќе има Јанез во 1986 година?
   Решение. Јанез е роден во $1900+10x+y$ година. Според условот на задачата
   $$1986-(1900+10x+y)=1+9+x+y \text{, т.е. } 11x+2y=76.$$
   Во множеството природни броеви последната равенка има единствено решение $x=y, y=5$. Значи, Јанез е роден во 1965 година и во 1986 година тој ќе има 21 година.

3. Четири патници патувале со такси во иста насока, во четири места кои се еднакво оддалечени од своите соседни места. Првиот патник при излегувањето ја платил четвртина од сумата која во тој момент ја покажувал таксиметарот, вториот патник при излегувањето ја платил третина, а третиот и четвртиот патник половина од сумата на парите која таксиметарот ја покажувал во моментот кога секој од нив излегувал од автомобилот. Дали таксистот наплатил повеќе или помалку отколку кога би возел еден од патниците на целата релација и за колку?
   Решение. Кога патниците влегле, таксистот го вклучил таксиометарот на кој се појавил износ од x денари. При поминување на растојанието до првото, потоа второто, третото место и четвртото место, цената секогаш се зголемувала за y денари. Така патниците редоследно плаќале:

$$\tfrac{1}{4}(x+y), \tfrac{1}{3}(x+2y), \tfrac{1}{2}(x+3y), \tfrac{1}{2}(x+4y).$$

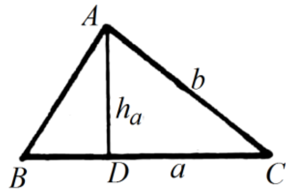
Цената на возењето е $x+4y$ денари, а патниците вкупно платиле

$$\tfrac{1}{4}(x+y)+\tfrac{1}{3}(x+2y)+\tfrac{1}{2}(x+3y)+\tfrac{1}{2}(x+4y)=x+4y+\tfrac{7}{12}x+\tfrac{5}{12}y$$

денари. Таксистот наплатил повеќе и тоа за оклу 50% од витинската цена.

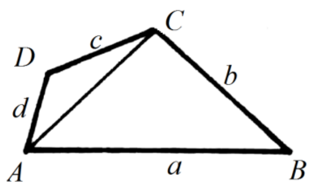
4. Докажи дека во секој конвексен четириаголник полузбирот на производот на соседните страни чии заеднички крајни точки се несоседни темиња е поголем или еднаков на плоштината на тој четириаголник.

Решение. Ќе докажеме дека во секој триаголник ABC со должини на страни a,b,c важи $\frac{ab}{2}\geq P$. Да го разгледам триаголникот даден на цртежот десно. Неговата плоштина е $P=\frac{1}{2}ah_a$. Но, во правоаголниот триаголник



ACD отсечката b, како хипотенуза, е најдолга, па затоа $h_a \leq b$ (знак за равенство важи ако и само ако $D\equiv A$). Затоа важи $\frac{ab}{2}\geq P$.

Сега да земеме произволен конвексен четириаголник $ABCD$ и со дијагоналата AC да го поделиме на два триаголници (цртеж десно). На добиените тгриаголници ABC и ACD да го примениме претходно докажаното неравенство. Имаме

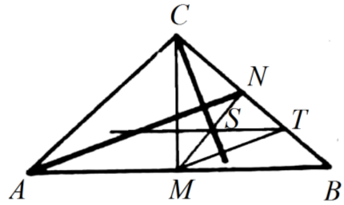


$$\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}cd\geq P'+P''=P, \text{ т.е. } \tfrac{ab+cd}{2}\geq P,$$

што и требаше да се докаже.

5. Во рамнокрак триаголник ABC точката M е средина на основата AB. Нека N е точка на кракот BC таква што $MN\perp BC$ и нека S е средина на отсечката MN. Докажи дека правата AN е нормална на правата CS.

Решение. Од својствата на рамнокракиот триаголник следува дека CM е висина повлечена кон основата AB. Нека T е средина на отсечката BN. Тогаш отсечката ST е средна линија на триагол-



никот BMN, па затоа е паралелна со AB и важи $ST \perp CM$. Но, важи и $MN \perp BC$, што значи дека S е ортоцентар на триаголникот CMT. Оттука заклучуваме дека CS е третата висина во овој триаголник, па затоа $CS \perp MT$. Но, отсечката MT е средна линија на триаголникот ABN, па е паралелна со AN, па затоа $CS \perp AN$.

Осмо одделение

1. Со цифрите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е запишан еден шестцифрен број. Зоран Дарко и Никола го погаѓале тој број. Зоран: 574698, Дарко: 786945, Никола: 456789. Се покажало дека Зоран ги погодил точните места на три цифри. Исто толку погодил и Дарко, а Никола го погодил местото само на една цифра. Определи го шестцифрениот број.

Решение. Зоран, Дарко и Никола за непознатиот број ги дале следниве претпоставки:

Зоран:	5	7	4	6	9	8
Дарко:	7	8	6	9	4	5
Никола:	4	5	6	7	8	9

Гледаме дека претпоставките на Зоран и Дарко не се поклопуваат во ниту една цифра, па како секој од нив погодил три цифри, произлегува дека тоа се три различни цифри. Затоа цифрата која ја погодил Никола е на истото место или кај Зоран или кај Дарко. Гледаме дека тоа може да е само цифрата 6. Значи, Дарко ја погодил цифрат 6, што значи дека Никола не ја погодил таа цифра. Затоа на четвртото место е точна претпоставката на Дарко, т.е. четвртата цифра е 9. Заклучувајќи на ист начин, добиваме дека Дарко ги погодил третата, четвртата и петтата цифра, а Зоран првата, втората и шестата. Според тоа, бараниот број е 576948.

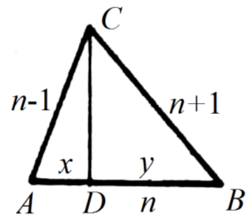
2. За кои вредности на x и y полиномот
$$P(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+13$$
прима најмала вредност.

Решение. Имаме:
$$P(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+13=(x-2)^2+(y+6)^2\geq 0.$$
Најмалата вредност на полиномот е 0, бидејќи тој е збир на два квадрати, а секој квадрат е поголем или еднаков на 0. Најмалата вреност се достигнува за

$$x-2=0 \text{ и } y+3=0, \text{ т.е. за } x=2, y=-3.$$

3. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја, не помали од 3. Докажи дека висината на триаголникот повлечена на средната по големина страна ја дели таа страна на делови чија разлика е 4.

Решение. Должините на страните AC, AB, BC на триаголникот ABC нека се $n-1, n, n+1$, соодветно. Нека $h=CD$ е висината која соодветствува на средната по големина страна AB и нека x и y се отсечките на кои точката D ја дели страната AB (цртеж десно). Од правоаголните триаголници ACD и BCD, применувајќи ја Питагоровата теорема следува $(n-1)^2-x^2=h^2$ и $(n+1)^2-y^2=h^2$, од каде добиваме $(n-1)^2-x^2=(n+1)^2-y^2$, односно $(x-y)(x+y)=4n$. Сега ако во последното равенство замениме $x+y=n$, добиваме $y-x=4n$, што и требаше да се докаже.

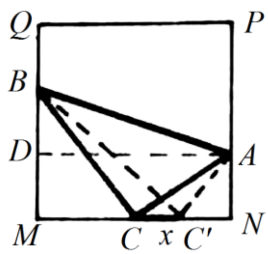


4. Даден е квадрат $MNPQ$ со страна со должина $1m$. На страните на овој квадрат се означени точки A, B, C:

- точката A е на $\frac{1}{3}$ од страната NP од точката N,
- точката B е на $\frac{2}{3}$ од страната MQ од точката M,
- точката C е средина на страната MN.

Триаголникот ABC не е правоаголем. На која страна и за колку треба да се помести точката C за да триаголникот ABC е правоаголен?

Решение. Да претпоставиме дека точката C треба да се помести во положба C' за да триаголникот ABC' биде правоаголен (цртеж десно). Нека $x=CC'$ е должината која треба да се определи. Понатаму, нека D е средина на отсечката MB. Тогаш $BD=\frac{1}{3}=AN$ и $MN=NC=\frac{1}{2}$. Од правоаголните триаголници ABD, ANC', MBC', ABC' добиваме



$$AB^2 = 1^2 + (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{10}{9},\ AC'^2 = (\tfrac{1}{2} - x)^2 + (\tfrac{1}{3})^2,$$

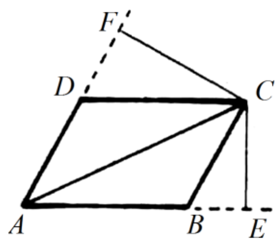
$$BC'^2 = (\tfrac{1}{2} + x)^2 + (\tfrac{2}{3})^2 \text{ и } AC'^2 + BC'^2 = AB^2.$$

Со замена од првите три во четвртото равенство, по средувањето добиваме $2x^2 = \frac{1}{18}$, од каде наоѓаме $x^2 = \frac{1}{36} = (\pm\frac{1}{6})^2$. Според тоа, $x = \frac{1}{6}$ или $x = -\frac{1}{6}$, што значи дека точката C треба да се помести лево или десно.

5. Нека AC е подолгата дијагонала на паралелограмот $ABCD$. Од темето C се повлечени нормали CE и CF на продолженијата на страните AB и AD. Дкажи дека

$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF. \qquad (1)$$

Решение. Од правоаголните триаголници ACE и BCE (цртеж десно) добиваме



$CE^2 = AC^2 - AE^2$ и $CE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2$

од каде наоѓаме

$$AC^2 - AE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2.$$

На сличен начин добиваме

$$AC^2 - AF^2 = CD^2 - (AF - AD)^2.$$

Последните две равенства ги собираме и добиваме

$$2AC^2 - AE^2 - AF^2 = BC^2 - (AE - AB)^2 + CD^2 - (AF - AD)^2.$$

Ако во последното равенство искористиме дека $AD = BC$ и $CD = AB$, по квадрирањето и средувањето го добиваме равенството

$$2AC^2 = 2AE \cdot AB + 2AF \cdot AD,$$

кое е еквивалкентно на равенството (1).