Ристо Малчески
Скопје

ОЈЛЕРОВА ПРАВА

Познато е дека во триаголник тежиштето, ортоцентарот и центарот на опишаната кружница се колинеарни точки, т.е. припаѓаат на една права. Оваа права се нарекува Ојлерова права (Леонард Ојлер – брилијантен швајцарски математичар, физичар, астроном и филозоф од осумнаесеттиот век).

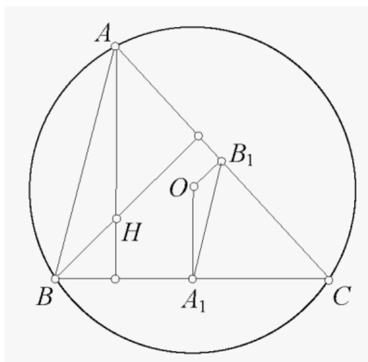
Во литературата постојат повеќе докази за Ојлеровата права, при што во некои докази се користат напредни знаења од геометријата. Во нашите разгледувања за Ојлеровата права ќе користиме само елементарни предзнаења, кои им се познати на повеќето читатели.

Тврдење 1. Нека O и H се центарот на впишаната кружница и ортоцентарот на триаголникот ABC и A_1, B_1, C_1 се средини на неговите страни BC, CA, AB, соодветно. Тогаш

1) $2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}$,

2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$,

3) $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}$.



Доказ. 1) Векторите $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{AH}$ се колинеарни, па затоа $\overrightarrow{OA_1} = m\overrightarrow{AH}$ и аналогно $\overrightarrow{OB_1} = n\overrightarrow{BH}$, за некои $m, n \in \mathbb{R}$. Бидејќи

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{HB}$$

и

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{OA_1} = n\overrightarrow{HB} + m\overrightarrow{AH},$$

добиваме

$$n\overrightarrow{HB} + m\overrightarrow{AH} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{HB},$$

$$(n - \tfrac{1}{2})\overrightarrow{HB} + (m - \tfrac{1}{2})\overrightarrow{AH} = \vec{0}.$$

Но, векторите $\overrightarrow{HB}$ и $\overrightarrow{AH}$ се линеарно независни, па од последното равенство следува $m = n = \frac{1}{2}$, односно $2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}$.

2) Ако го искористиме $2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}$, добиваме

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}.$$

3) Од тврдењето 1) следува

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}&=2\overrightarrow{OA_1}+2\overrightarrow{OB_1}+2\overrightarrow{OC_1}\\&=2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA_1})+2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB_1})+2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC_1})\\&=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\&=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

Тврдењето 2) во литературата е познато како *теорема на Хамилтон*. ■

Тврдење 2. Нека O,A,B,C се произволни точки. Тогаш:

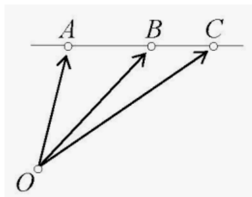
1) Точките A,B,C се колинеарни ако и само ако за некој $k\in\mathbb{R}$ важи $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$.

2) Ако точката C ја дели отсечката AB во однос $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, тогаш

$$\overrightarrow{OC}=\tfrac{1}{1+m}\overrightarrow{OA}+\tfrac{m}{1+m}\overrightarrow{OB}.$$

Доказ. 1) Имаме

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB} &&\Leftrightarrow\\&\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OB} &&\Leftrightarrow\\&\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) &&\Leftrightarrow\\&\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$



2) Добиеното равенство $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$ го тансформираме еквивалентно

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA} &&\Leftrightarrow\\&\overrightarrow{BC}=k(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) &&\Leftrightarrow\\&k\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}=-k\overrightarrow{AC} &&\Leftrightarrow\\&(k-1)\overrightarrow{CB}=-k\overrightarrow{AC} &&\Leftrightarrow\\&\tfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\tfrac{1-k}{k}.\end{aligned}$$

Според условот $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=m$, па од $\frac{1-k}{k}=m$ следува $k=\frac{1}{m+1}$ и $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, т.е.

$$\overrightarrow{OC}=\tfrac{1}{1+m}\overrightarrow{OA}+\tfrac{m}{1+m}\overrightarrow{OB},\ m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}.\ ■$$

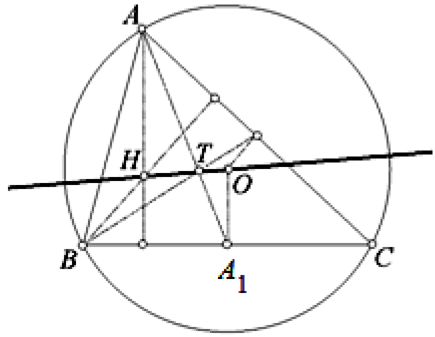
Тврдење 3. Центарот на опишанната кружница O, тежиштето T и ортоцентарот H на триаголникот ABC се колинеарни точки и важи $\overline{HT}=2\overline{TO}$.

Доказ. Со A_1 да ја означиме средината на страната BC. Бидејќи

$$\overline{AT}:\overline{TA_1}=2:1,$$

од тврдењето 2 следува

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT}&=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}\\&=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$



Според тоа,

$$\overrightarrow{OT}=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Но, според теоремата на Хамилтон имаме

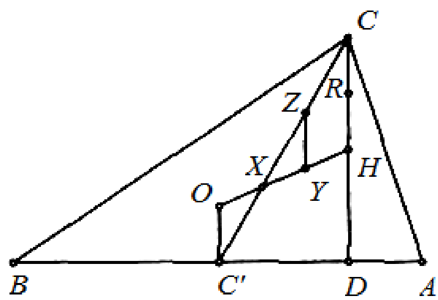
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH},$$

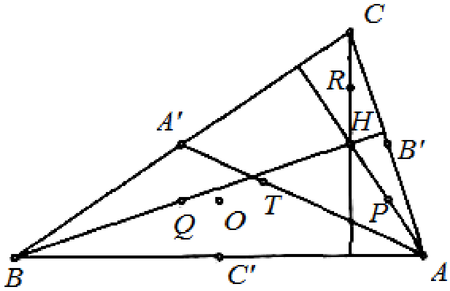
па затоа $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OT}$, од каде следува тврдењето. ■

Во тврдењето 3, со помош на тврдењата 1 и 2 дадовме елементарен доказ за постоењето на Ојлеровата права. Во следните разгледувања ќе дадеме уште два докази за постоењето на Ојлеровата права. Пред тоа, прво да ги означиме точките на даден триаголник ABC кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања. Нека H,O,T се соодветно ортоцентарот, центарот на опишаната кружница и тежиштето на триаголникот ABC, C',A',B' се соодветно средините на страните AB,BC,CA и P,Q,R се соодветно средините на отсечките AH,BH,CH.

Тврдење 4. Центарот на опишанната кружница O, тежиштето T и ортоцентарот H на триаголникот ABC се колинеарни точки и важи $\overline{HT}=2\overline{TO}$.

Доказ. *Прв начин*. Со X да ја означиме пресечната точка на тежишната линија CC' и отсечката HO (цртеж десно). Понатаму, нека Z и Y се соодветно средините на отсечките CX и HX. Тогаш ZY е средна линија на триаголникот CHX, па затоа $ZY \parallel CH$ и $\overline{ZY}=\frac{1}{2}\overline{CH}$.

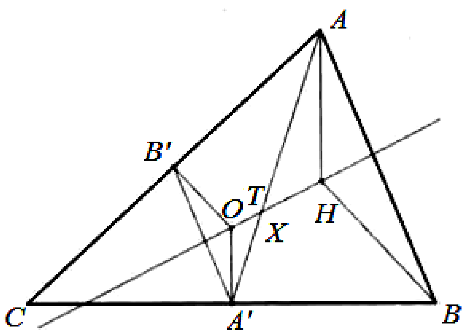




Понатаму, забележуваме дека $A'Q \| OC'$ и $\overline{A'Q} = \frac{1}{2}\overline{CH}$. Имено, OC' и CH се нормални на AB па затоа $OC' \| CH$, а $A'Q$ е средна линија на триаголникот CHB, па затоа $A'Q \| CH$ (цртеж десно). Слично се докажува дека $C'Q \| OA'$, што значи дека четириаголникот $A'QC'O$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{A'Q} = \overline{OC'} = \frac{1}{2}\overline{CH} = \overline{ZY}$.

Понатаму, $\measuredangle YZX = \measuredangle XC'O$, $\measuredangle ZYX = \measuredangle C'OX$ (агли со паралелни краци) и $\overline{OC'} = \overline{ZY}$, па затоа триаголниците YXZ и OXC' се складни.. Според тоа, $\overline{XO} = \overline{YX}$ и $\overline{XC'} = \overline{ZX}$. Сега, бидејќи точката Y е средина на отсечката HX, добиваме $\overline{HY} = \overline{YX} = \overline{XO}$, т.е. $\overline{HX} : \overline{XO} = 2:1$.

Видовме дека $\overline{ZX} = \overline{XC'}$. Но, точката Z е средина на отсечката CX, па затоа $\overline{CZ} = \overline{ZX} = \overline{XC'}$, односно $\overline{CX} : \overline{XC'} = 2:1$, што значи дека $X \equiv T$. Со тоа докажавме дека точките O, T, H се колинеарни и дека $\overline{HT} = 2\overline{TO}$.



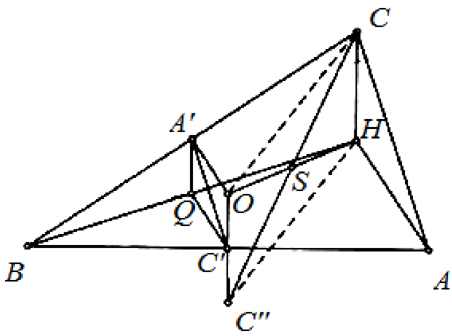
Втор начин. Нека A' и B' се средините на страните BC и AC на триаголникот ABC (цртеж десно). Отсечката $A'B'$ е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $A'B' \| AB$ и $\overline{AB} : \overline{A'B'} = 2:1$. Ја повлекуваме правата OH. Со X да ја означиме пресечната точка на OH и AA'. Лесно се гледа дека $\triangle ABH \sim \triangle A'B'O$ и $\triangle AXH \sim \triangle A'XO$. Оттука следува

$$\overline{AX} : \overline{A'X} = \overline{HX} : \overline{OX} = \overline{AH} : \overline{A'O} = \overline{AB} : \overline{A'B'} = 2:1. \tag{1}$$

Од $\overline{AX} : \overline{A'X} = 2:1$ следува дека точката X се совпаѓа со тежиштето T на триаголникот ABC, а од (1) добиваме $\overline{HT} : \overline{OT} = 2:1$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 1. Докажи дека Ојлеровите прави на триаголниците ABC, ABH, BCH и ACH се сечат во една точка.

Решение. Ќе докажеме дека Ојлеровите прави на триаголниците ABC и ABH се сечат во центарот S на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC. Слично се докажува дека тоа важи и за триаголниците BCH и ACH.

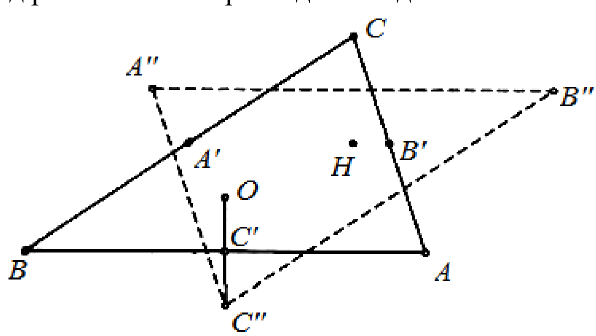


Со $C"$ да го означиме центарот на опишаната кружница на триаголникот ABH, т.е. $C"\in OC'$ и $C"Q\perp BH$ (цртеж десно). Во првиот доказ на тврдењето 4 докажавме дека $A'Q\| OC'$ и $\overline{A'Q}=\overline{OC'}$. Понатаму, $A'C'$ е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $A'C'\perp BH$, што значи $A'C'\| C"Q$. Според тоа, $C"QA'C'$ е паралелограм и затоа $\overline{A'Q}=\overline{C'C"}$. Но, $\overline{A'Q}=\overline{OC'}$, па затоа $\overline{OC'}=\overline{C'C"}$.

Во првиот доказ на тврдењљето 4 докажавме дека $\overline{OC'}=\frac{1}{2}\overline{CH}$, па затоа $\overline{OC"}=\overline{CH}$ и $OC"\| CH$. Оттука следува дека $C"OCH$ е паралелограм кај кого дијагоналите OH и $CC"$ се Ојлеровите прави соодветнои за триаголниците ABC и ABH, бидејќи C е ортоцентар на триаголникот ABH. Бидејќи дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат, добиваме дека дијагоналите OH и $CC"$ се сечат во точката S која е центар на Ојлеровата кружница за триаголниците ABC и ABH (види [2]). ■

Задача 2. Нека $C",A",B"$ се соодветно центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABH,BCH,ACH. Докажи дека триаголникот $A"B"C"$ е складен со триаголникот ABC.

Решение. Од решението на претходната задача имаме $\overline{OC'}=\overline{C'C"}$.



Слично важи $\overline{OA'}=\overline{A'A"}$, па затоа $\overline{A'C'}=\frac{1}{2}\overline{A"C"}$ и $A'C' \parallel A"C"$ (средна линија на $\triangle A"B"C"$).

Од друга страна важи $\overline{A'C'}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $A'C' \parallel AC$ (средна линија на $\triangle ABC$). Значи, $\overline{A"C"}=\overline{AC}$ и $A"C" \parallel AC$.

Аналогно се докажува дека $\overline{B"C"}=\overline{BC}$ и $B"C" \parallel BC$, односно $\overline{A"B"}=\overline{AB}$ и $A"B" \parallel AB$.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека триаголниците ABC и $A"B"C"$ се складни. ■

Литература

1. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za I razred Matematičke gimnazija, Beograd, 1998
2. Малчески, Р. (2021). Ојлерова кружница, Математички талент