Самоил Малчески, Скопје, Македонија
Ристо Малчески, Скопје, Македонија

ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ – КОМБИНАТОРИКА

Една од дисциплините која е застапена на секоја математичка олимпијада, како за учениците од основното образование, така и за учениците од средното образование е Комбинаториката. Токму затоа во продолжение ќе дадеме повеќе комбинаторни задачи, при што ќе разгледаме и неколку задачи со игри и стратегии, кои полека но сигурно наоѓаат свое место на престижните математички натпревари.

1. Коцка е расечена неколку пати со рамнини паралелни на еден нејзин ѕид. Вкупната плоштина на добиените делови е 2022 пати поголема од плоштината на почетната коцка. Колку пати е расечена коцката?
   Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека работ на коцката има должина 1. Тогаш плоштината на коцката е еднаква на 6, а плоштината на добиените делови е еднаква на $2022 \cdot 6$. Од друга страна, ако n е бројот на расекувањето на коцката, тогаш бидејќи со секое расекување плоштината се зголемува за 2, добиваме дека плоштината на добиените делови е $6 + 2n$. Според тоа, точна е равенката $2n + 6 = 2022 \cdot 6$, чие решение е $n = 6063$.

2. Определи го најмалиот број скокови кои треба да ги направи шаховската фигура коњ, на табла 1001×1001 за да од горното лево поле стигне до долното десно поле.
   Решение. При шаховско боење на таблата, горното лево аголно поле (чии координати се (0,0)) и долното десно аголно поле (со координати (1000,1000)) се исто обоени. Коњот при секој скок оди на поле со спротивна боја. Тоа значи дека се потребни парен број скокови за да коњот премине од горното лево на долното десно аголно поле. Не се доволни 666 скокови, бидејќи растојанието меѓу двете полиња е еднакво на 2000 (1000 полиња хоризонтално и 1000 полиња вертикално), а коњот со секој скок може да се приближи до целта најмногу за 3 полиња. Од друга страна, коњот може да напредува по дијагонала за 3 полиња во два последователни скока, што значи дека по 664 скока може да стигне на полето (996,996). Лесно се гледа дека од полето (996,996)

на десното долно аголно поле може да стигне со 4 скока. Значи, бараниот минимален број скокови е 668.

3. Определи го бројот на подмножествата на множеството $S=\{1,2,...,2n\}$ во кои равенката $x+y=2n+1$ нема решенија.

   Решение. Броевите од множеството S ќе ги поделиме на n парови, така што збирот на броевите во секој пар ќе биде $2n+1$. За секој пар имаме три можности за избор: само помалиот број е во подмножеството, само поголемиот број е во подмножеството и ниту еден број не е во подмножеството. Затоа бараниот број подмножества е еднаков на 3^n.

4. Во рамнината се дадени n прави такви што секоја се сече со точно 1999 други прави. Определи го бројот n и опиши ги сите можности.

   Решение. Разликуваме два случаја.

   Прв случај. Меѓу дадените прави нема паралелни. Тогаш секоја од дадените прави ги сече преостанатите $n-1$ права, па како според условот на задачата се сече со точно 1999 прави, добиваме дека $n=2000$.

   Втор случај. Меѓу дадените прави има паралелни. Тогаш релацијата паралелност го разбива множеството прави на класи на еквиваленција. Како секоја права ги сече сите прави кои не се во нејзината класа, а според условот на задачата се сече со точно 1999 други прави, следува дека сите класи имаат еднаков број елементи. Ако со k го означиме бројот на класите, а со m бројот на елементите во секоја класа,тогаш $n=km$ и $(k-1)m=1999$. Но, 1999 е прост број, па затоа $k-1=1$ или $k-1=1999$. Втората равенка го дава веќе разгледаниот случај кога нема паралелни прави, а од првата имаме $k=2$ и $m=1999$. Значи, $n=3998$.

5. На таблата се обележани 1996 точки кои се темиња на правилен 1996-аголник. Кој е најмалиот број точки кои што треба да се избришат така што меѓу преостанатите точки да не постојат четири точки кои се темиња на:

   а) квадрат, б) правоаголник?

   Решение. а) Сите 1996 точки може да се поделат на 499 четворки така што точките од секоја четворка се темиња на квадрат (Зошто?). Од

секоја четворка треба да се избрише најмалку една точка, што значи дека најмалиот број точки кои треба да ги избришеме е 499.

б) Сите 1996 точки може да се поделат на 998 парови така што точките на секој пар се краеви на еден дијаметар. Бидејќи страните на секој правоаголник се паралелни на некој дијаметар, од секој пар, со исклучок на најмногу од еден, треба да се избрише барем по една точка, што значи дека минималниот број точки кои треба да ги избришеме е еднаков на 997.

6. Дали е можно да се изберат 50 отсечки на бројната права, кои не мора да се дисјунктни, така што ќе бидат исполнети следниве услови:

а) Должините на избраните отсечки се 1,2, 3, ..., 50.

б) Крајните точки на избраните отсечки се сите целобројни точки од 1 до 100, вклучувајќи ги 1 и 100.

Решение. Ќе докажеме дека не е можно да се изберат 50 отсечки кои ќе ги задоволуваат дадените услови.

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека е можен избор на 50 отсечки кои ќе ги задоволуваат условите а) и б). Од дадените услови следува дека во секоја целобројна точка од 1 до 100 се наоѓа по една крајна точка на избраните отсечки. Ако левите крајни точки на избраните отсечки се наоѓаат во точките $x_1, x_2, ..., x_{50}$, тогаш нивните десни крајни точки се во точките $1+x_1, 2+x_2, ..., 50+x_{50}$. Бидејќи на секоја од овие точки е придружен точно еден број од 1 до 100 имаме

$$x_1 + x_2 + ... + x_{50} + 1 + x_1 + 2 + x_2 + ... + 50 + x_{50} = 1 + 2 + ... + 100,$$

па затоа

$$2(x_1 + x_2 + ... + x_{50}) + 1275 = 5050,$$
$$2(x_1 + x_2 + ... + x_{50}) = 3775,$$

што е противречност.

7. На табла $n \times n, n > 1$, произволно се избрани $2n$ полиња и во секое избрано поле е поставен жетон. Докажи дека секогаш може да се изберат четири полиња со жетони така што нивните центри се темиња на паралелограм.

Решение. Нека m е бројот на колоните на кои има најмалку два жетони. Во секоја од овие колони го разгледуваме растојанието на најлево поставениот жетон до сите преостанати жетони. Можни растојанија се $1, 2, ..., n-1$. Во овие m колони е најмалку $2n-(n-m)=n+m$ жетони,

па затоа бројот на растојанијата е најмалку $(m+n)-m=n$. Од принципот на Дирихле следува дека постојат две колони со еднакви растојанија. Јасно, центрите на полињата во кои се овие четири жетони се темиња на паралелограм.

8. Во рамнината е даден круг со радиус 1 и неколку ленти со вкупна ширина 100. Докажи дека со паралелно поместување на лентите може да се постигне тие да го покријат кругот.

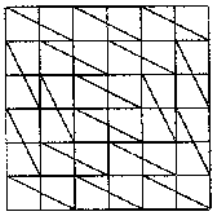
Решение. За секоја лента го разгледуваме нејзиниот правец, кој е определен со правецот на нејзините гранични прави. Правецот на секоја лента можеме да го претставиме со полуправа низ кординатниот почеток, која со позитивната насока на $x-$оската зафаќа конвексен агол. Меѓу овие полуправи постои конечно множество полуправи такви што сите припаѓаат на некој агол од 45°, а претставуваат ленти за кои вкупниот збир на траките е најмалку 25 (рамниот агол подели го на четири дела и сега тврдењето следува од принципот на Дирихле). Нека S е множеството ленти претставени со воочените полуправи. Без ограничување на општоста можеме да земе дека сите воочени полуправи припаѓаат на аголот меѓу $x-$оската и правата $y=x$ (симетралата на првиот квадрант), и дека овие прави се тангенти на кругот, при што граничните прави на една лента се паралелни на $x-$оската.

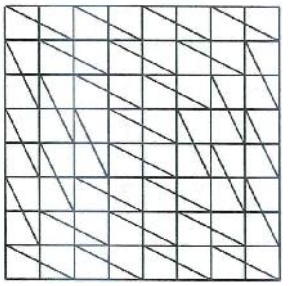
Даденият круг можеме да го разгледуваме како впишан во рамнокрак правоаголен триаголник OAB, каде O е координатниот почеток, A е точка на позитивниот дел на $x-$оската, B е точка на правата $y=x$ таква што AB е нормална на $x-$оската. Нека a е должина на катета на правоаголниот триаголник OAB. Лесно се гледа дека $a<3,5<25$.

Лентите на множеството S да ги подредиме по растечки редослед на аглите кои нивните гранични прави ги зафаќаат со $x-$оската: $T_1,T_2,...,T_k$. Лената T_1 ќе ја поместиме така што нејзиниот долен раб ќе се полопи со $x-$оската. Нека A_1 е пресекот на горниот раб на лентата со правата AB. Сега ја поместуваме лентата T_2 така што нејзиниот долен раб минува низ точката A_1, при што A_2 е пресекот на нејзиниот орен раб со правата AB. Јасно, за некој $p\le k$, правата T_p че ја покрие точката B, и дека лентите $T_1,T_2,...,T_p$ че го покријат целиот триаголник OAB, што значи и целиот круг.

Забелешка. Лесно се гледа дека тврдењето важи и ако збирот на ширината на сите ленти е еднаков на 14.

9. Од картон се исечени правоаголници 2×1. На секој правоаголник е повлечена една дијагонала и така се добиени два вида домина, бидејќи постојат два начини за повлекување на дијагонала. Имаме доволен број домина од секој вид.
   а) Дали е можно да се изберат 18 домина и од нив да се состави квадрат 6×6 така што никои две од повлечените дојагонали не се допираат.
   б) Дали е можно да се изберат 32 домина и од нив да се состави квадрат 8×8 така што никои две од повлечените дојагонали не се допираат.
   Решение. а) Да. Еден од можните начини на составување на квадратот е даден на долниот лев цртеж.
   б) Да. Еден од можните начини на составување на квадратот е даден на долниот десен цртеж.





10. На таблата се запишани три цели броја. Во секој чекор еден од овие броеви се брише и на негово место се запишува збирот на другите два броја намален за 1. По неколку чекори на таблата се запишани броевите 17, 75 и 91. Дали е можно на почетокт на таблата да биле запишани броевите:
    а) 2, 2, 2, б) 3, 3, 3.
    Решение. а) На почетокот на таблата се запишани три парни броја. Кога еден од нив ќе се избрише, на негово место се запишува непарен број, па на таблата имаме два парни и еден непарен број. Сега, ако избришеме непарен број, на негово место се запишува непарен,а ако избришеме парен број на негово место се запишува парен број.Според тоа,почнувајќи од вториот чекор па натаму на таблата постојано ќе имаме два парни и еден непарен број, што значи дека не е можно да се добијат три непарни броја од три парни броја.
    б) Можно е. На пример:

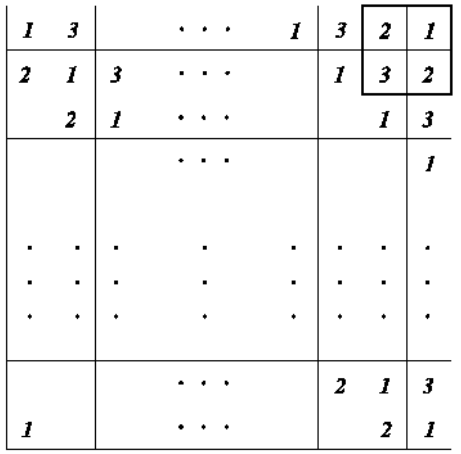
$$3,3,3 \to 5,3,3 \to 5,3,7 \to 5,11,7 \to 17,11,7 \to 17,11,27$$
$$\to 17,43,27 \to 17,43,59 \to 17,75,59 \to 17,75,91.$$

11. Од квадрат 100×100 се исечени четири полиња кои формираат квадрат 2×2.

а) Докажи дека преостанатиот дел од таблата не може да се покрие со правоаголници 1×3 (секој правоаголник покриватри полиња) ако 2×2 квадратот е исечен во еден од аглите на квадратот 100×100.

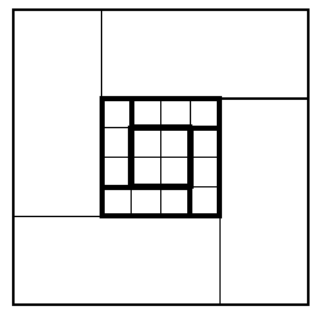
б) Докажи дека покривањето е можно ако 2×2 квадратот е исечен од центарот на квадратот 100×100.

Решение. а) Полињата на квадратот 100×100 да ги обоиме со боите 1, 2 и 3 како што е прикажано на долниот цртеж.



По исекувањето на 2×2 квадратот во преостанатиот дел од таблата ќе имаме 333 единечни квадратчиња од бојата 1, 331 единечно квадратче од бојата 2 и 332 единечно квадратче од бојата 3. Но, секој 1×3 правоаголник, без разлика дали е вертикално или хоризонтално поставен, покри точно по едно единечно квадратче од секоја боја. Според тоа, бараното покривање не е можно.

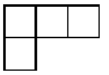
б) По исекувањето на централниот 2×2 квадрат, ќе ја урамиме дупката со 4 правоаголници 1×3 како што е прикажано на цртежот десно.



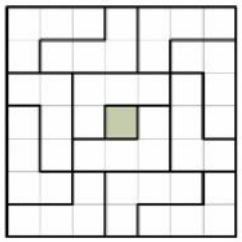
Остатокот од таблата може да се подели на четири правоаголници со димензии 48×52. Сега, бидејќи $3 \mid 48$, во добиените 4 правоаголници секој ред со 48 единечни квадрат-

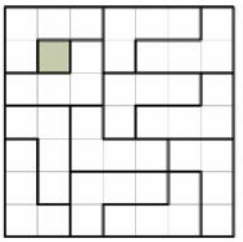
чиња може да се покрие со 16 правоаголници 1×3, што значи бараното покривање е можно.

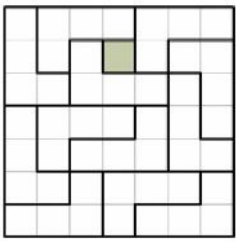
12. Табла со димензии 7×7 е покриена со L – тетрамина (цртеж десно), така што точно едно поле останало непокриено. Определи ги сите полиња на таблата кои може да останат непокриени.



Решение. Со шаховско црно-бело боење на таблата, добиваме 25 црни и 24 бели полиња. Бидејќи L – тетрамино покрива две црни и две бели полиња, треба да исфрлиме ЦРНО поле. Сега таблата ќе ја обоиме по колони црно-бело. Нека x е бројот на L – тетрамината кои покриваат три црни и едно бело поле, а y е бројот на тетрамината кои покриваат три бели и едно црно поле. Разликата на бројот на црните и белите полиња може да биде 8 или 6, во зависност од тоа дали сме исфрлиле бело или црно поле. Бидејќи $x+y=12$, заради парноста следува дека $x-y=4$, па мора да исфрлиме БЕЛО поле. Добивме девет кандидати кои во едното покривање се обоени црно, а во другото бело и со проба за три случаја лесно ги наоѓаме бараните покривања. Заради симетрија доволно е да се разгледаат полињата $(2,2),(2,4)$ и $(4,4)$.







13. На секое поле на табла со димензии $n\times n\,(n\geq 2)$ се наоѓа по еден жетон. Во еден чекор го поместување секој жетон на едно нему соседно дијагонално поле. По некој чекор на едно поле може да има повеќе жетони. Определи го најмалиот број полиња на кои може да се постават сите жетони по конечен број поместувања.

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски црно-бело. Тогаш при поместувањето на дијагонално поле ниту еден жетон не ја менува бојата. Ќе докажеме дека на секоја боја остануваат барем два жетона. Вертикалите на таблата да ги означиме со броевите од 1 до n. Во секој потез жетон кој се наоѓа на црно поле на вертикала означена со непарен број преминува на црно поле на вертикала означена со парен број. Исто така,

жетон кој се наоѓа на црно поле на вертикала означена со парен број преминува на црно поле на вертикала означена со непарен број. Бидејќи на почетокот имаме жетони на црните полиња од парните и непарните вертикали, заклучуваме дека во секој потез ќе бидат зафатени барем 2 црни полиња. Слично се добива дека во секој потез ќе бидат зафатени барем 2 бели полиња. Значи, во секој потез на таблата ќе бидат зафатени барем 4 полиња. Да докажеме дека оваа вредност може да се достигне. Во секој потез ги поместуваме жетоните кон горната лева аголна 2×2 подтабла. Ако некој жетон веќе се наоѓа на оваа подтабла, тогаш ние можеме да го оставиме на неа со соодветно дијагонално поместување. Така, по конечен број чекори само 4 полиња од таблата ќе бидат зафатени.

14. Од множеството $\{1,2,3,...,2009\}$ избрани се 1005 броеви така што збирот на никои два не е еднаков на 2009 и на 2010. Определи ги сите начини на кои може да се изберат овие 1005 броеви.

Решение. Нека S е бараното подмножество со 1005 броеви. Да забележиме дека за секој број n, освен за 2009 и 1005, постојат точно два броја кои собрани со n даваат збир еднаков на 2009 или 2010. Да ги наредиме броевите на следниов начин:

2009, 1, 2008, 2, 2007, 3, ..., 1007, 1003, 1006, 1004, 1005.

Збирот на секои два последователни броја во низата е еднаков на 2009 или 2010. Според тоа, никои два последователни броја не може да се во S. Бидејќи $|S|=1005$, заклучуваме дека 2009 мора да е во множеството S. Аналогно заклучуваме дека броевите 2008, 2007, ..., 1006 мора да се во S, што значи дека множеството S е еднозначно определено, т.е.

$$S=\{2009,2008,2007,...,1006,1005\}.$$

15. Пабло и Филип ја играат следнава игра: наизменично во темињата на n – аголник ги запишуваат броевите 0 и 1. Пабло ја започнува играта и победува ако по некој негов потез постои триаголник, формиран од три последователни темиња на n – аголникот, таков што збирот на запишаните броеви во неговите темиња е делив со 3. Филип победува ако тоа успее да го онезвозможи. Определи кој играч има победничка стратегија ако:

а) $n=2019$, б) $n=2020$, в) $n=2021$.

Решение. Пабло победува ако $n>3$ е непарен број, додека Филип победува ако $n>3$ е парен број.

Ако $n=2k$, ги подредуваме темињата на многуаголникот $A_1A_2A_3...A_{2k-1}A_{2k}$ во последователни парови $\{A_1,A_2\},...,\{A_{2k-1},A_{2k}\}$. Филип игра така што во преостанатото теме на оној пар во кој Пабло запишал број, го запишува спротивниот број од бројот кој го запишал Пабло. Попрецизно, ако Пабло во темето A_{2j-1} го запише бројот i, тогаш Филип во темето A_{2j} го запишува бројот $1-i$, а ако Пабло во темето A_{2j} го запише бројот i, тогаш Филип во темето A_{2j-1} го запишува бројот $1-i$. Тогаш збирот на броевите во секои три последователни темиња на многуаголникот е 1 или 2, бидејќи тој триаголник содржи точно еден пар темиња во кои е запишан бројот 1 или точно еден пар темиња во кои е запишан бројот 0.

Во другите случаи победува Пабло. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека Пабло во првиот потез го запишал бројот 0 во полето A_1. Ако Филип не запише 1 во темето A_2 или A_n, тогаш Пабло брзо победува. Навистина, во барем едно од темињата A_3 и A_{n-1} не е запишан број по првиот потез на Филип, да претпоставиме дека тоа е темето A_3, тогаш Пабло запишува 0 во темото A_2. Сега во темињата A_1,A_2 е запишан бројот 0, а во темињата A_3 и A_n не е запишан ниту еден број. Јасно, Филип може да запише број во едно од темињата A_3 и A_n, па затоа со запишување на 0 во преостанатото од овие две темиња Пабло формира триаголник од три последователни темиња во кои збирот на запишаните броеви е 0, т.е. делив со 3.

Понатаму, да претпоставиме дека Филип запишал 1 во полето A_2 (симетрично се игра за полето A_n).

Ако $n=4k+1\geq 5$, тогаш Пабло победува на следниов начин. Пабло во теме A_{4i-1} запишува 1, а во теме A_{4i+1} запишува 0, за секој $1\leq i\leq k$. Јасно, Филип мора да игра така што запишува 0 во темињата A_{4i} за $1\leq i\leq k$ и запишува 1 во темињата A_{4i+2} за $1\leq i\leq k$. Ако тоа не го направи, тогаш Пабло во три последователни темиња запишува ист број, што значи збир делив со 3. Но, на крајот на играта, во темињата A_{4k},A_{4k+1} и A_1 ќе биде запишан бројот 0, што значи дека Пабло победува.

Ако $n=4k+3\geq 7$, тогаш Пабло победува на следниов начин. Играта се одвива на ист начин како во претходниот случај се до претпоследната

серија потези. Да претпоставиме дека до сега се запишани броеви во темињата $A_1,...,A_{4k}$ како и во претходниот случај, во спротивно Пабло веќе победил. Во темињата A_1 и A_{4k} е запишан бројот 0, додека во темињата $A_{4k+1}, A_{4k+2}, A_{4k+3}$ не се запишани броеви. Сега Пабло во темето A_{4k+2} го запишува бројот 0 и победува во следниот потез, бидејќи Филип може да зафати со бројот 1 едно од темињата A_{4k+1} или A_{4k+3}, па во другото теме Пабло запишува 0 со што победува.

16. Во секое поле на 5×5 табла е запишан бројот 0. Во еден потез е дозволено на таблата да се избере произволно поле и да се зголемат за 1 броевите запишани во тоа поле и во неговите соседни полиња (две полиња се соседни ако имаат заедничка страна). По конечен број чекори во сите полиња е запишан природниот број n. Определи ги сите можни вредности на n

Решение. Полињата на таблата да ги означиме со A,B,C,D,E,F, како што е прикажано на цртежот десно. Нека a,b,c,d,e,f е вкупниот број потези кои се реализирани на полињата означени со соодветните букви. Јасно е дека:

A	B	D	B	A
B	C	E	C	B
D	E	F	E	D
B	C	E	C	B
A	B	D	B	A

- секое поле означено со буквата A влијае точно на две полиња означени со буквата B,
- секое поле означено со буквата B влијае точно на по едено поле означено со буквите A,C,D,
- секое поле означено со буквата C влијае точно на по едено поле означено со буквите B,E,
- секое поле означено со буквата D влијае точно две полиња означени со буквата B и на едно поле означено со букватра E,
- секое поле означено со буквата E влијае точно на по едно поле означено со буквите D,F и на две полиња означени со буквата C,
- полето F влијае на четирите полиња означени со буквата E.

Според тоа, важат следниве равенки кои го опишуваат вкупниот број промени на вредностите на бројот на полињата означени со иста буква:

$A\colon\ a+b=4n$, $B\colon\ b+2a+2c+2d=8n$, $C\colon\ c+b+2e=4n$,

$D\colon\ d+b+e=4n$, $E\colon\ e+2c+d+4f=4n$, $F\colon f+e=n$.

Со решавање на овој систем добиваме

$$a=\frac{16}{11}n, b=\frac{28}{11}n, c=\frac{4}{11}n,$$
$$d=\frac{10}{11}n,\ e=\frac{6}{11}n,\ f=\frac{5}{11}n.$$

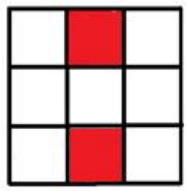
Бидејќи n е природен број, потребен услов е $11|n$, што значи $n=11k, k\in\mathbb{N}$. Овој услов е и доволен што покажува за $k=1$ распоредот на бројот на потезите на секое поле прикажан на цртежот десно. За произволен $k>1$ само прикажаниот број потези се множи со k.

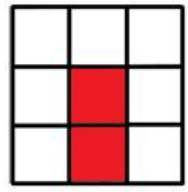
3	4	3	3	4
4	1	1	1	4
3	1	5	2	2
3	1	2	1	3
4	4	2	3	5

17. Разгледуваме бесконечна квадратна мрежа составена од единечни квадрати. Некои полиња од оваа мрежа се обоени црвено, а другите се обоени бело, при што секој правоаголник 2×3 или 3×2, составен од 6 полиња, содржи точно 2 црвени полиња. Колку црвени полиња може да има во правоаголник 9×11?

Решение. Под $m\times n$ правоаголник ќе подразбираме правоаголник со m редици и n колони. Ќе докажеме дека во секој 9×11 се наоѓаат точно 33 црвени полиња. За таа цел доволно е да докажеме дека во секој 3×1 правоаголник има точно едно црвено поле. (Јасно, ова на ист начин може да се докаже и за секој 1×3 правоаголник.)

Очигледно, 3×1 не може да содржи 3 црвени полиња. Нека претпоставиме дека во 3×1 има две црвени полиња (види ги долните цртежи).





Тогаш двата нему соседни 3×1 правоаголници содржат само бели полиња (во спротивно постои 3×2 правоаголник со повеќе од 2 црвени полиња). Но, сега добиваме 2×3 правоаголник кој има само едно црвено поле, што противречи на условот на задачата. Според тоа, не постои 3×1 кој содржи две црвени полиња. Понатаму, не е можно 3×1 правоаголник да содржи само бели полиња, бидејќи тогаш со него соседниот 3×1 правоаголник тој формира 3×2 кој има 2 црвени полиња, т.е. соседниот 3×1 правоаголник треба да има 2 црвени полиња, а

тоа видовме дека не е можно. Конечно, секој 3×1 правоаголник содржи само 1 црвено поле.

Задачи за самостојна работа

18. Полињата на 3×3 табела се пополнети со броевите -1 и 1. Во секој чекор истовремено во секое поле од табелата се запишува производот на сите броеви кои се запишани во полињата кои со тоа поле имаат заедничка страна. Дали за секој почетен распоред на броевите запишани во табелата може со оваа постапка да се добие состојба таква што во сите полиња на табелата ќе биде запишан бројот 1?

19. Тетрамино е многуаголник со плоштина 4 кај кој сите страни се со целобројна должина и секои две соседни страни се заемно нормални. (Таков многуаголник може да се добие со спојување на четири единечни квадрати при што секој квадрат има барем една заедничка страна со преостанатите три квадрати). Две тетрамина се различни ако едното од другото не може да се добие со симетрија и/или ротација.
    а) Колку има различни тетрамина?
    б) Дали со тетрамина е можно да се покрие без преклопување на тетраминатa правоаголник 4×7 така што секое тетрамино ќе се употреби барем еднаш?

20. На шаховска табла произволно се означени 15 полиња. Да ги разгледаме сите отсечки чии крајни точки се во центрите на означените полиња. Докажи дека меѓу овие отсечки постојат четири кои имаат еднаква должина.

21. Околу тркалезна маса седат 50 мажи и 50 жени. Докажи дека постојат две лица со различен пол меѓу кои седат точно две лица со различен пол.

22. Сто тенисери учествувале на турнир на кој секој со секого изиграл точно еден меч (во тенисот нема нерешени резултати). На крајот од турнирот е формирана табела според бројот на победите. Еден тенисер на турнирот завршил на k – тото место и е единствен со тој број на победи, при што дал интересна изјава: Го победив секој тенисер кој е подобро пласиран од мене, а изгубив од секој тенисер кој е послабо

пласиран од мене. Определи ја најмалата можна вредност на бројот k, т.е. кое е најдоброто место кое овој тенисер можел да го освои на турнирот?

23. Жаба се наоѓа во координатниот почеток на Декартовиот координатен систем. Секоја секунда жабата скока хоризонтално или вертикално во некоја од четири соседни точки чии две координати се целобројни. Определи го бројот на различните точки во кои ќабата може да се најде по 2015 скокови.

24. На една прослава вкупно имало 2007 лица. За секои 1003 присутни лица меѓу преостанатите лица постои барем едно лице кое се познава со секое од овие 1003 лица. Докажи дека на прославата постои лице кое се познава со сите присутни лица.

25. Во две соседни полиња со димензија 1×1 на квадратна 10×10 табла се наоѓа богатство. Горјан треба да погоди кои се тие полиња. Со еден потез тој може произволно да избере едно поле на таблата и да добие информација дали во него има богатство или не. Определи го најмалиот можен број потези кој со определена стратегија е доволен Горјан со сигурност да ги нопредели полињата во кои е богатството. (Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.)

26. Андреј и Горјан играат на табла 2018×2018. Тие наизменичко поставуваат по еден жетон на полињата на таблата. Андреј има за цел свои жетони да ги постави на

а) четири, б) пет

последователни полиња во еден ред или една колона. Дали Горјан тоа може да го оневозможи?