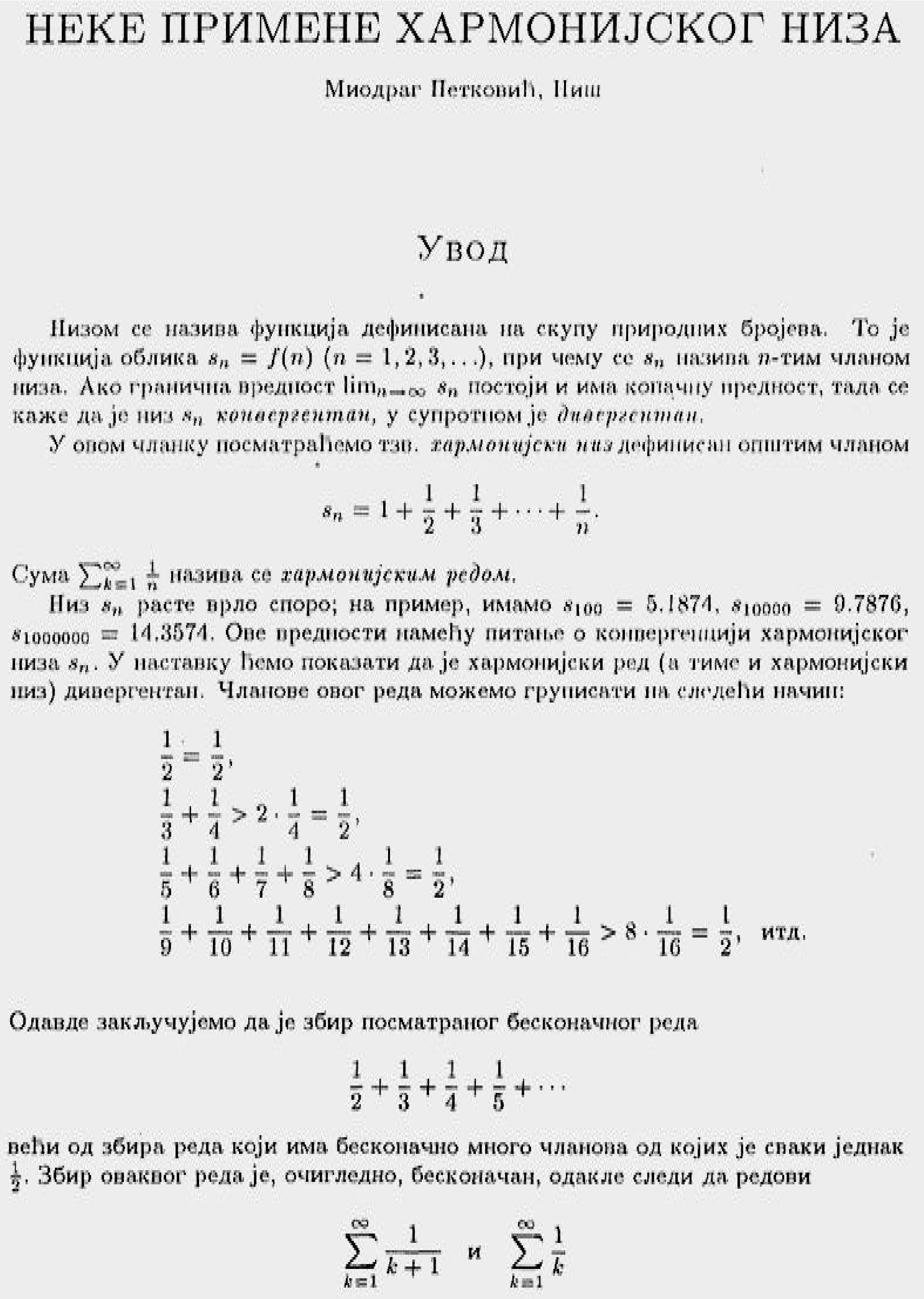


НЕКЕ ПРИМЕНЕ ХАРМОНИЈСКОГ НИЗА

Миодраг Петковић, Ниш

Увод

Низом се назива функција дефинисана на скупу природних бројева. То је функција облика $s_n = f(n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, при чему се s_n назива n-тим чланом низа. Ако гранична вредност $\lim_{n\to\infty} s_n$ постоји и има коначну вредност, тада се каже да је низ s_n *конвергентан*, у супротном је *дивергентан*.

У овом чланку посматраћемо тзв. *хармонијски низ* дефинисан општим чланом

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Сума $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ назива се *хармонијским редом*.

Низ s_n расте врло споро; на пример, имамо $s_{100} = 5.1874$, $s_{10000} = 9.7876$, $s_{1000000} = 14.3574$. Ове вредности намећу питање о конвергенцији хармонијског низа s_n. У наставку ћемо показати да је хармонијски ред (а тиме и хармонијски низ) дивергентан. Чланове овог реда можемо груписати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2},\quad \text{итд.}
\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је збир посматраног бесконачног реда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

већи од збира реда који има бесконачно много чланова од којих је сваки једнак $\frac{1}{2}$. Збир оваквог реда је, очигледно, бесконачан, одакле следи да редови

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

имају бесконачне суме, тј. да су дивергентни. Исто важи и за хармонијски низ.

У наставку ћемо приказати два изванредно занимљива проблема при чијем решавању се користе хармонијски ред и хармонијски низ.

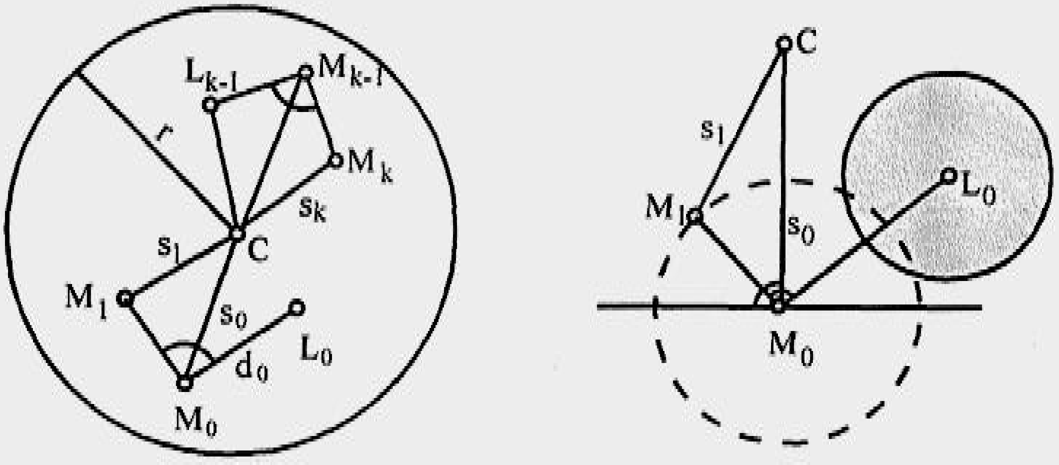
Лав и човек

Задатак о лаву и човеку спада у ред оних задатака из области занимљиве математике који је привукао велику пажњу математичара. Поставио га је Р. Радо 1932. године и гласи овако:

Лав и човек, који се налазе у арени кружног облика, могу се кретати најбрже брзином v. Може ли човек (не излазећи из круга арене) одабрати такво кретање да буде сигуран да га лав никада неће ухватити (под претпоставком да су снаге човека и лава неисцрпне)?

Занимљиво је да је читавих 25 година владало мишљење (поткрепљено "необоривим" доказима) да човек не може умаћи лаву. Тек четврт века касније професор А. С. Безикович је оборио такво решење. Његов доказ о могућностима човека да избегне сусрет са лавом први пут је објављен у врло занимљивој књизи *A Mathematician's Miscellany* (Лондон 1957) чувеног енглеског математичара Џона Литлвуда (John E. Littlewood, 1885–1977). О овом проблему може се такође прочитати у раду Р. Радоа *How the lion tamer was saved* (Ontario Secondary School Mathematics Bulletin, October 1972) и заједничком раду П. Радоа и Р. Радоа *More about lions and other animals* (Mathematical Spectrum, No 3 (1974)).

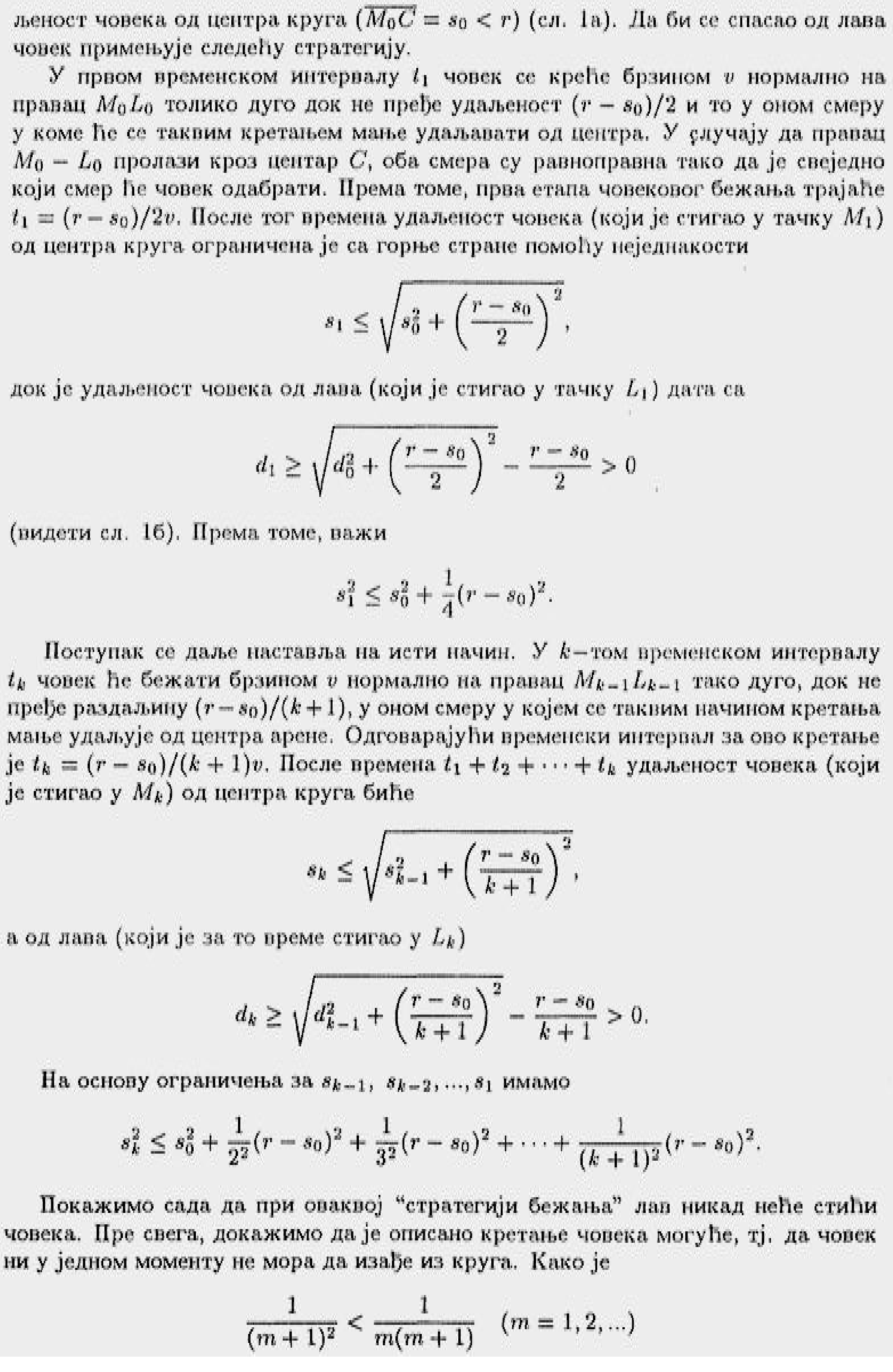
Једно решење овог проблема може се наћи у већ поменутом раду Р. Радоа *How the lion tamer was saved*. Решење које дајемо узето је из Девидсове збирке *100 елементарних али тежих задатака* (Математичка библиотека, Београд 1964).



a) b)

Слика 1

Нека је r полупречник круга, C његов центар, M_0 и L_0 почетни положаји човека и лава, d_0 почетна удаљеност између њих ($\overline{M_0L_0} = d_0$) и s_0 почетна уда-



љеност човека од центра круга ($\overline{M_0C} = s_0 < r$) (сл. 1а). Да би се спасао од лава човек примењује следећу стратегију.

У првом временском интервалу t_1 човек се креће брзином v нормално на правац M_0L_0 толико дуго док не пређе удаљеност $(r - s_0)/2$ и то у оном смеру у коме ће се таквим кретањем мање удаљавати од центра. У случају да правац $M_0 - L_0$ пролази кроз центар C, оба смера су равноправна тако да је свеједно који смер ће човек одабрати. Према томе, прва етапа човековог бежања трајаће $t_1 = (r - s_0)/2v$. После тог времена удаљеност човека (који је стигао у тачку M_1) од центра круга ограничена је са горње стране помоћу неједнакости

$$s_1 \leq \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{r - s_0}{2}\right)^2},$$

док је удаљеност човека од лава (који је стигао у тачку L_1) дата са

$$d_1 \geq \sqrt{d_0^2 + \left(\frac{r - s_0}{2}\right)^2} - \frac{r - s_0}{2} > 0$$

(видети сл. 1б). Према томе, важи

$$s_1^2 \leq s_0^2 + \frac{1}{4}(r - s_0)^2.$$

Поступак се даље наставља на исти начин. У $k-$том временском интервалу t_k човек ће бежати брзином v нормално на правац $M_{k-1}L_{k-1}$ тако дуго, док не пређе раздаљину $(r - s_0)/(k+1)$, у оном смеру у којем се таквим начином кретања мање удаљује од центра арене. Одговарајући временски интервал за ово кретање је $t_k = (r - s_0)/(k+1)v$. После времена $t_1 + t_2 + \cdots + t_k$ удаљеност човека (који је стигао у M_k) од центра круга биће

$$s_k \leq \sqrt{s_{k-1}^2 + \left(\frac{r - s_0}{k+1}\right)^2},$$

а од лава (који је за то време стигао у L_k)

$$d_k \geq \sqrt{d_{k-1}^2 + \left(\frac{r - s_0}{k+1}\right)^2} - \frac{r - s_0}{k+1} > 0.$$

На основу ограничења за s_{k-1}, $s_{k-2}, \ldots, s_1$ имамо

$$s_k^2 \leq s_0^2 + \frac{1}{2^2}(r - s_0)^2 + \frac{1}{3^2}(r - s_0)^2 + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2}(r - s_0)^2.$$

Покажимо сада да при оваквој "стратегији бежања" лав никад неће стићи човека. Пре свега, докажимо да је описано кретање човека могуће, тј. да човек ни у једном моменту не мора да изађе из круга. Како је

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m(m+1)} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1},$$

добијамо за свако $k=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} s_k^2 &\leq s_0^2+(r-s_0)^2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &\leq s_0^2+(r-s_0)^2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)\\ &= s_0^2+(r-s_0)^2(1-\frac{1}{k+1})<s_0^2+(r-s_0)^2<[s_0+(r-s_0)]^2=r^2. \end{aligned}$$

Према томе, за свако k важи $s_k<r$, тј. човек се налази унутар круга.

Из неједнакости $d_k>0$, која важи за свако k, закључујемо да лав неће ухватити човека у случају описаног кретања.

На крају, потребно је још доказати да описано кретање може трајати по вољи дуго, тј. да је збир временских интервала $t_1+t_2+\cdots+t_k$ по вољи велики, ако је k довољно велико. Поменути збир је једнак

$$t_1+t_2+\cdots+t_k=(r-s_0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right).$$

На основу резултата из уводног дела следи да је сума $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ бесконачна, те због тога и збир

$$\sum_{k=1}^{\infty}t_k=(r-s_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

тежи у бесконачност кад $k\to\infty$, што је и требало доказати.

Црв на гуменом конопцу

Црв се налази на једном крају гуменог конопца који се (претпоставимо) може бесконачно растезати. На почетку конопац је дуг 1km. Црв гмиже дуж конопца према другом крају константном брзином од 1cm у секунди. На крају сваке секунде конопац се *тренутно* растеже за још један километар. Дакле, у првој секунди црв прелази 1cm а дужина конопца постаје 2km. После друге секунде црв је прешао још 1cm а конопац је постао дугачак 3km, итд. Растезање конопца је равномерно, као растезање гумене траке. У овом процесу црв се помера и то, како због сопственог кретања (1cm/sec), тако и услед истезања конопца. *Може ли при описаној ситуацији црв досегнути други крај конопца? Ако је то могуће, одредити приближно време таквог путовања и дужину конопца на крају путовања.*

Слика 2

Независно од параметара (почетна дужина гуменог конопца, брзина црва и број истезања конопца), црв ће стићи до другог краја конопца и то за коначно време. Исто би важило и ако се истезање врши континуално, међутим, због лакше анализе, у постављеном задатку је претпостављено да се истезања конопца врше у дискретним корацима.

Како црв стално напредује, може се поставити питање, није ли очигледно да он мора коначно да стигне на циљ? Не обавезно, јер може се вечито константно напредовати ка циљу а да се никад не дође до њега. Напредовање црва мери се помоћу збира (опадајућих) делова дужине конопца. Овај збир може бити бесконачан а да ипак одређује тачку која је много испред краја конопца. Заиста, такав случај би се десио кад би се конопац развлачио удвостручавајући своју дужину након сваке секунде.

Међутим, под условима датим у задатку црв успева да стигне до краја конопца. Како има 100 000 центиметара у једном километру, на крају прве секунде црв ће превалити 1/100 000–ти део дужине конопца. Током друге секунде црв превaљује (почев од претходне тачке након развлачења конопца) растојање од 1/200 000–тог дела дужине конопца који се растегао на два километра. Током треће секунде он прелази 1/300 000–ти део конопца (који је сада дуг три километра), и тако даље. Напредовање црва, изражено преко делова дужине целог конопца, износи

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Збир у загради је добро познати *хармонијски низ.* Чим сума овог низа (израз у загради) постане већа од 100 000, горњи израз ће постати већи од 1, што значи да је црв достигао крај конопца. Број сабирака n у овој парцијалној суми хармонијског реда биће једнак броју секунди које су истекле. Како се црв креће један центиметар у секунди, n је такође коначна дужина конопца у центиметрима.

Овај огроман број, са тачношћу у оквиру једног минута, је

$$e^{100\,000-y} \pm 1,$$

где је $y \cong 0.57721566\ldots$ Ојлерова константа која представља граничну вредност низа $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$ када $n\to\infty$. Поменути број даје дужину конопца која увелико надмашује пречник познатог свемира и време које превазилази садашње процене старости свемира.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1997/98