Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Макесонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XIV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1971

1.(II,71). Ако a, b, c, d, x, y, z, u се позитивни броеви и ако

$$x:a = y:b = z:c = u:d,$$

да се покаже дека тогаш

$$\sqrt{xa} + \sqrt{yb} + \sqrt{zc} + \sqrt{ud} = \sqrt{(a+b+c+d)(x+y+z+u)}.$$

Решение. Означувајќи го односот $x:a$ со k, можеме да напишеме:

$$x = ak,\ y = bk,\ z = ck,\ u = dk,$$

а, според својствата на продолжените пропорции, имаме:

$$(x+y+z+u):(a+b+c+d) = x:a = k,$$

т.е.

$$x+y+z+u = (a+b+c+d)k.$$

Користејќи го тоа, а имајќи предвид дека a, b, c, d се позитивни броеви, добиваме:

$$\begin{aligned}\sqrt{xa} + \sqrt{yb} + \sqrt{zc} + \sqrt{ud} &= \sqrt{a^2k} + \sqrt{b^2k} + \sqrt{c^2k} + \sqrt{d^2k} =\\ &= (a+b+c+d)\sqrt{k} =\\ &= \sqrt{(a+b+c+d)(a+b+c+d)k} =\\ &= \sqrt{(a+b+c+d)(x+y+z+u)},\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

2.(II,71). Дадена е равенката

$$p^2x^2 + p^3x + 1 = 0,$$

каде што p е реален број различен од нула, со корени x_1 и x_2. За кои вредности на p е исполнето неравенството

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > a, \qquad (1)$$

каде што a е даден позитивен реален број.

Решение. Не наоѓајќи ги корените x_1 и x_2 на дадената равенка, а користејќи ги Виетовите правила: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = \frac{1}{p^2}$, можеме да ја изразиме левата страна на (1) со помош на p. Имаме:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2x_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^4 - 4x_1x_2((x_1+x_2) - 2x_1x_2) - 6x_1x_2}{x_1^2x_2^2}$$

$$= p^8 - 4p^4 + 2.$$

За корените на дадената равенка да бидат реални броеви, потребно е нејзината дискриминанта да биде ненегативна, што значи треба да биде

$$p^6 - 4p^2 \geqslant 0,$$

т.е. $p \leqslant -\sqrt{2}$ или $p \geqslant \sqrt{2}$. Неравенството (1) се сведува на

$$p^8 - 4p^4 + 2 - a > 0. \qquad (2)$$

Оваа неравенка по p е задоволена за секој број p за кој важи:

$$p^4 > 2 + \sqrt{2+a},$$

т.е. за

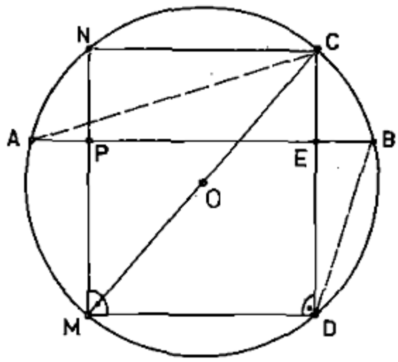
$$p > \sqrt[4]{2 + \sqrt{2+a}} \text{ или } p < -\sqrt[4]{2 + \sqrt{2+a}}. \qquad (3)$$

За овие вредности на p, при $a \geqslant 2$, имаме $\sqrt[4]{2+\sqrt{2+a}} \geqslant \sqrt{2}$, па корените на дадената равенка се реални. Според тоа, неравенството (1) е исполнето за секој број p што го исполнува кој било од условите (3), при $a \geqslant 2$, а при $0 < a < 2$, неравенството (1) не е исполнето за ниеден број p.

<u>3.(II,71)</u>. Во круг со дијаметар d, тетивите AB и CD се сечат под прав агол во точката E што не се совпаѓа со центарот на кругот. Да се докаже дека:

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = d^2. \qquad (1)$$

<u>Решение</u>. Правата низ точката D, повлечена паралелно со AB, нека ја сече кружницата во точката M, а потоа правата низ M, паралелна со CD, нека ја сече кружницата во точката N (црт.1.71).



Црт.1.71

Бидејќи аголот MDC е прав, отсечката MC минува низ центарот на кругот, а тоа значи дека аголот MNC е прав. Според тоа, четириаголникот MDCN е правоаголник. Увидувајќи дека $\overline{AP} = \overline{EB}$ и ставајќи $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED}$, $\overline{MD} = \overline{PE} = \overline{AE} - \overline{AP} = \overline{AE} - \overline{EB}$, добиваме:

$$d^2 = \overline{MD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AE} - \overline{EB})^2 + (\overline{CE} + \overline{ED})^2 =$$

$$= \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 - 2\overline{AE}\cdot\overline{EB} + \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 + 2\overline{CE}\cdot\overline{ED}. \qquad (2)$$

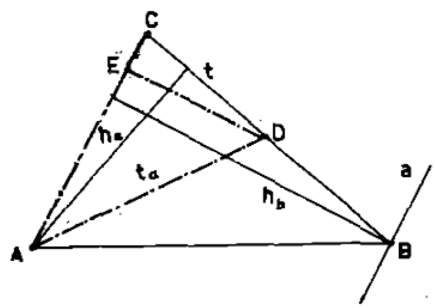
Аглите BAC и BDC се еднакви како периферискi агли над ист лак, па од сличноста на триаголниците AEC и BED добиваме $\overline{AE}:\overline{CE} = \overline{ED}:\overline{BE}$, т.е.

$$\overline{AE}\cdot\overline{EB} = \overline{CE}\cdot\overline{ED}. \qquad (3)$$

Од (2), имајќи го предвид (3), ја добиваме точноста на равенството.

4.(II,71). Да се конструира триаголник ABC ако се дадени h_a, h_b и t_a.

Решение. Да ставиме $\overline{DE} = \frac{h_b}{2}$. За правоаголниот триаголник AED е позната хипотенузата t_a и едната катета $\overline{DE}$, па тој може да се конструира (црт.2.71). Ако се конструира кружницата (A, h_a) и од D се повлече тангента t на неа, тогаш како пресек на t со правата AE се добива точка C. Потоа, како пресек на t со правата a, повлечена паралелно со AE и на растојание h_b од правата AE, на страната кај што е D, се добива точка B. Притоа, лесно се уочува дека $\overline{BD} = \overline{DC}$.



Црт.2.71

Од направената дискусија е јасно дека точките A, B и C се темиња на триаголникот што требаше да се конструира.

1.(III,71). Да се докаже дека од равенството

$$2\log_b x = \log_a x + \log_c x \qquad (1)$$

следува

$$c^2 = (ac)^{\log_a b}. \qquad (2)$$

Решение. Користејќи го равенството

$$\log_a b \log_b x = \log_a x,$$

равенството (1) може да се напише во облик

$$2\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a c},$$

т.е.

$$2\log_a c = (1+\log_a c)\log_a b = (\log_a c + \log_a a)\log_a b;$$

значи:

$$\log_a c^2 = \log_a (ac)^{\log_a b},$$

а од тоа го добиваме равенството (2).

2.(III,71). Да се докаже дека равенката

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

нема решенија.

Решение. Ако дадената равенка ја напишеме во обликот

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\cos x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right),$$

добиваме

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\cos x = \pm\frac{\pi}{4}\sin x + 2k\pi,$$

$$\pm\sin x + \cos x = 2 - 8k,$$

$$\pm\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x = 2 - 8k,$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\left(\pm\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = 2-8k,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right) = 2-8k,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right) = \frac{2-8k}{\sqrt{2}} = (1-4k)\sqrt{2}.$$

За к = 0 имаме $(1-4к)\sqrt{2}=\sqrt{2}$; за к < 0 имаме $(1-4к)\sqrt{2}>\sqrt{2}$; за к > 0 имаме $(1-4к)\sqrt{2}<-3\sqrt{2}$. Значи, дадената равенка нема решение.

3.(III,71). Нека R е радиусот на сферата опишана околу правилна четиристрана пирамида, а r е радиусот на сферата впишана во таа пирамида. Ако α е наклонетиот агол на бочната страна према основата, да се докаже дека

$$R = \frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha}\,r. \qquad (1)$$

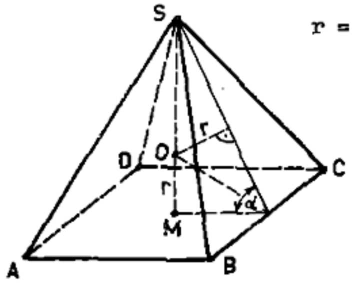
Користејќи го ова равенство, да се докаже дека $R>(1+\sqrt{2})\,r$.

Решение. Да ставиме: $a=\overline{AB}$, $H=\overline{MS}$, $r=\overline{OF}$, $\alpha=\sphericalangle MES$ (црт. 3.71). Од триаголникот EMS имаме

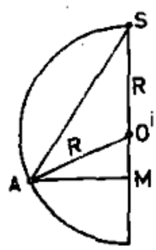
$$H=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha, \qquad (2)$$

а бидејќи $\sphericalangle MEO=\frac{\alpha}{2}$, од триаголникот EMO имаме:

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$



Црт.3.71



Црт.4.71

Од црт.4.71, на кој е претставен осниот пресек на пирамидата поставен низ бочниот раб AS, увидуваме дека:

$$R^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2, \text{ т.е. } R^2 = (\overline{MS} - R)^2 + \overline{MA}^2,$$

од каде што добиваме $2\overline{MS}\cdot R = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2$, т.е.

$$R = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + H^2}{2H}. \qquad (4)$$

Ако во (4), според (2) и (3), ги замениме вредностите на a и H го добиваме равенството (1).

Ставајќи во (1) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = x$, добиваме

$$R = \frac{1+x^2}{2x(1-x)}\, r,$$

при што, поради $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, имаме $0 < x < 1$. Така, последниот дел од задачата се сведува на докажување на неравенството

$$\frac{1+x^2}{2x(1-x)} \geqslant 1+\sqrt{2},$$

кое, поради $2x(1-x) > 0$, е еквивалентно со неравенството

$$(2\sqrt{2}+3)x^2 - 2(\sqrt{2}+1)x + 1 \geqslant 0,$$

т.е. со неравенството

$$((2\sqrt{2}+3)x - (\sqrt{2}+1))^2 \geqslant 0,$$

што е очигледно точно за секој x.

4.(III,71). Дадени се два петцифрени броја кои даваат еднакви остатоци при делењето со 11. Допишувајќи го едниот број кон другиот, се добива десетцифрен број. Да се докаже дека тој број е делив со 11.

Решение. Дадените броеви да ги означиме со A и B. Имаме:

$$A = 10^4a_1 + 10^3b_1 + 10^2c_1 + 10d_1 + e_1,$$

$$B = 10^4a_2 + 10^3b_2 + 10^2c_2 + 10d_2 + e_2.$$

Од условот на задачата имаме:

$$A = 11q_1 + r, \quad B = 11q_2 + r.$$

За бројот C што се добива со допишување на B кон A имаме:

$$C = 10^5(10^4a_1+10^3b_1+10^2c_1+10d_1+e_1)+10^4a_2+10^3b_2+10^2c_2+10d_2+e_2=$$

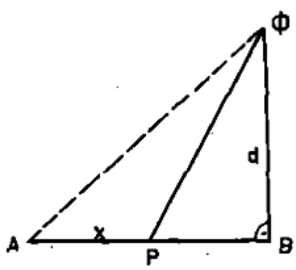
$$= 10^5(11q_1 + r) + 11q_2 + r = 11(10^5q_1 + q_2) + (10^5 + 1)r =$$

$$= 11(10^5q_1 + q_2 + 9091r),$$

што значи C се дели со 11 без остаток.

1.(IV,71). Низ градот A минува праволиниска железничка пруга која од фабриката Ф е на растојание $d=\overline{ФB}$, при што $\overline{AB}=a$. Од Ф треба да се изгради пат до пругата. Како да се спроведе патот ФP до пругата, за цената на превозот од Ф до A да биде најмала, ако се знае дека цената на превозот (по километар) по патот е m ($m>1$) пати поголема од цената на превозот по железницата?

Решение. Прво, јасно е дека точката P ќе биде некаде меѓу точките A и B (црт.5.71). Ако цената на превозот по железницата (по километар) ја означиме со c, тогаш по патот (по километар)



Црт.5.71

таа ќе биде mc, а ако ја означиме со s вкупната цена на превозот од Ф до А, тогаш ќе имаме $s = c\overline{AP} + mc\overline{P\Phi}$. Ставајќи $\frac{s}{c} = y$, $\overline{AP} = x$, добиваме:

$$y = x + m\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + d^2}, \qquad (1)$$

при што $0 \leqslant x \leqslant a$. Според тоа, задачата се сведува на наоѓање минимум на функцијата (1). Имаме:

$$y' = 1 - \frac{m(a-x)}{\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + d^2}},$$

па, од $y' = 0$, добиваме:

$$x^2 - 2ax + a^2 - \frac{d^2}{m^2 - 1} = 0,$$

чии решенија се:

$$x_1 = a - \frac{d}{\sqrt{m^2 - 1}}, \quad x_2 = a + \frac{d}{\sqrt{m^2 - 1}}. \qquad (2)$$

Бидејќи $x \leqslant a$, решението x_2 отпаѓа. Бидејќи, пак, $x \geqslant 0$, имаме $x_1 \geqslant 0$, од каде што добиваме

$$m \geqslant \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + d^2}.$$

Според тоа, точката P треба да се избере на растојание $a - \frac{d}{\sqrt{m^2 - 1}}$ од А за да биде цената на превозот од Ф до А најмала. Точката P нема да се совпадне со А, ако $m > \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + d^2}$, а во друг случај ќе треба да се гради директен пат од Ф до А.

<u>2.(IV,71)</u>. Да се најде најголемиот коефициент пред x во разложувањето на биномот $(1+x)^{2n}$ и да се докаже дека тој е парен број.

<u>Решение</u>. Бидејќи $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$, треба да го нај-

деме најголемиот од броевите $\binom{2n}{k}$ за $k=0,1,\dots,2n$. Од равенството

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$$

следува дека тој број е меѓу броевите $\binom{2n}{0}, \binom{2n}{1}, \dots, \binom{2n}{n}$. Да видиме каква врска постои меѓу $\binom{2n}{k}$ и $\binom{2n}{k-1}$. Имаме:

$$\binom{2n}{k} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} =$$

$$= \frac{(2n-k+1)(2n)!}{k(k-1)!(2n-k+1)!} = \frac{2n-k+1}{k}\binom{2n}{k-1}.$$

Ако $k \leqslant n$, тогаш $\frac{2n-k+1}{k} > 1$, т.е. за $k \leqslant n$ имаме

$$\binom{2n}{k} > \binom{2n}{k-1}.$$

Значи, најголемиот меѓу броевите $\binom{2n}{k}$, $k=0,1,\dots,2n$, е бројот $\binom{2n}{n}$.

Бидејќи

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}.$$

добиваме дека бројот $\binom{2n}{n}$ е парен.

3.(IV,71). Да се најде геометриското место на точките симетрични со фокусот на една парабола во однос на нејзините тангенти.

Решение. Да избереме правоаголен координатен систем во рамнината за кој x-оската е оска на параболата, а y-оската е тангента на параболата во темето. Во така избраниот координатен систем равенката на дадената парабола ќе биде

$$y^2 = 2px,$$

а равенката на тангентата на параболата во точката $(\frac{a^2}{2p}, a)$ е

$$y = \frac{p}{a}x + \frac{a}{2}. \qquad (1)$$

фокусот на параболата е точката $F(\frac{p}{2}, 0)$, па равенката на нормалата повлечена од F на тангентата (1) е

$$y = -\frac{a}{p}x + \frac{a}{2} . \qquad (2)$$

Пресечната точка на тангентата (1) и соодветната нормала (2) е точката $A(0,\frac{a}{2})$. Ако $M(x,y)$ е произволна точка од бараното геометриско место, тогаш точките F, A и M се колинеарни и точката A е средина на отсечката FM, па имаме

$$\frac{1}{2}(x+\frac{p}{2}) = 0, \text{ т.е. } x = -\frac{p}{2} .$$

Значи, бараното геометриско место на точки е правата $x = -\frac{p}{2}$.

4.(IV,71). На колку делови се разделува дадена сфера со рамнини што минуваат низ центарот на сферата, ако кои било три од нив не минуваат низ ист дијаметар.

Решение. Да ги означиме рамнините со $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$. Кружницата што е пресек на сферата со к-тата рамнина, ја сече секоја од останатите к-1 рамнини во по две точки, па затоа тие точки ја делат к-тата кружница на $2(k-1)$ делови. Со секој од тие $2(k-1)$ делови се граничат по два дела од сферата, коишто поминуваат во еден ако се исфрли к-тата кружница. Ако $B(k)$ е бројот на деловите, на кои рамнините $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ ја разделуваат сферата, тогаш

$$B(k) = 2(k-1) + B(k-1). \qquad (1)$$

Бидејќи $B(1) = 2$, користејќи го (1), добиваме:

$$B(k) = 2(1+1+2+\ldots+k-1) = 2+k(k-1).$$