JMMO 2001

1. Во квадратна 3×3 таблица запишани се девет природни броеви такви што збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонали е еднаков на m. Докажи дека $3\mid m$.

   Решение. Нека броевите се $a_i, b_i, c_i, i=1,2,3$ (цртеж десно). Од условот на заадачата последователно добиваме:

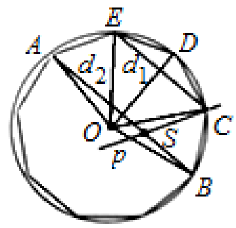
a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

$$(a_1+b_2+c_3)+(a_2+b_2+c_2)+(a_3+b_2+c_1)=3m$$
$$(a_1+a_2+a_3)+3b_2+(c_3+c_2+c_1)=3m$$
$$m+3b_2+m=3m$$
$$3b_2=m,$$

   од каде следува $3\mid m$.

2. Докажи дека во правилен деветаголник должината на страната е еднаква на разликата на должините на најдолгата и најкратката дијагонала.

   Решение. Нека A,B,C,D,E се темиња на правилен деветаголник означени како на цртежот десно. Тогаш $\overline{AB}=d_2$ е најдолгата дијагонала, $\overline{EC}=d_1$ е најкратката дијагонала и $\overline{AE}=a$ е страната на деветаголникот. Имаме



$$\measuredangle AOE=\frac{360^\circ}{9}=40^\circ,\ \measuredangle OAE=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ,$$
$$\measuredangle OAB=\frac{180^\circ-4\cdot 40^\circ}{2}=10^\circ,\ \measuredangle BAE=70^\circ-10^\circ=60^\circ,$$
$$\measuredangle OEC=\frac{180^\circ-2\cdot 40^\circ}{2}=50^\circ,\ \measuredangle AEC=70^\circ+50^\circ=120^\circ.$$

   Бидејќи $\measuredangle BAE+\measuredangle AEC=180^\circ$ и тоа се соседни агли на трансферзала добиваме $AB\parallel EC$. Да повлечеме права p низ точката C која е паралелна со правата AE и нека $p\cap AB=S$. Според тоа, $\measuredangle BSC=60^\circ$ и како $\measuredangle ABC=60^\circ$, залучуваме дека $\triangle SBC$ е рамностран. Значи,

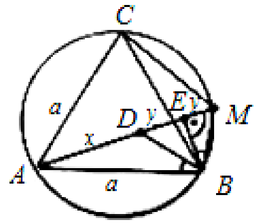
$$a=\overline{BC}=\overline{BS}=\overline{AB}-\overline{AS}=\overline{AB}-\overline{EC}=d_2-d_1,$$

   што и требаше да се докаже,

3. Рамностран триаголник со страна a е впишан во кружница. На кружницата е избрана точка M. Определи го збирот на квадратите на

растојанијата од точката M до темињата на триаголникот.

Решение. Нека M лежи на лакот BC и нека D е точка од отсечката AM таква што $\overline{MB}=\overline{MD}$. Имаме $\measuredangle ACB=\measuredangle AMB=60^{\circ}$, како периферни агли над ист лак, па затоа $\triangle DBM$ е рамностран. Од $\measuredangle BAD=\measuredangle BCM$ (периферни агли над ист лак), $\overline{AB}=\overline{CB}$ и $\overline{BD}=\overline{BM}$ следува $\triangle ABD\cong\triangle CBM$, па затоа $\overline{AD}=\overline{CM}$. Значи,



$$\overline{AM}=\overline{AD}+\overline{DM}=\overline{CM}+\overline{MB}.$$

Нека E е подножјето на висината во рамностраниот триаголник $\triangle DBM$ и да означиме $\overline{AD}=x, \overline{AD}=\overline{DE}=y$. Тогаш $h=\overline{BE}=y\sqrt{3}$ и како триаголникот ABE е правоаголен добиваме

$$a^2=(x+y)^2+(y\sqrt{3})^2=x^2+2xy+4y^2.$$

Според тоа,

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=(x+2y)^2+(2y)^2+x^2=2(x^2+2xy+4y^2)=2a^2.$$

4. Определи го најголемот природен број n таков што $n^2+2002n$ е точен квадрат на некој природен број.

Решение. Нека $n^2+2002n=a^2$, $a\in\mathbb{N}$. Тогаш $a=n+k$ за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа

$$n^2+2002n=(n+k)^2$$
$$2002n-2nk=k^2$$
$$n=\frac{k^2}{2002-2k}=\frac{k^2}{2(1001-k)}.$$

Од последното равенство следува дека $k=2m$ за некој $m\in\mathbb{N}$, што значи $n=\frac{2m^2}{1001-2m}$. Јасно, $1001-2m>0$, па затоа $m\le 500$. Сега, најголемиот природен број n се добива кога во $n=\frac{2m^2}{1001-2m}$ имаме најголен броител и најмал именител, а тоа е за $m=500$. Конечно, бараниот број е $n=\frac{2\cdot 500^2}{1001-2\cdot 500}=500000$.

5. Нека a и b се реални броеви такви што

$$a^3 - 3ab^2 = 44 \text{ и } b^3 - 3a^2b = 8 .$$

Определи го $a^2 + b^2$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^3 &= a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6\\ &= a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2\\ &= (a^3-3ab^2)^2 + (b^3-3a^2b)^2\\ &= 44^2 + 8^2 = 2000,\end{aligned}$$

па затоа

$$a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2000} = 10\sqrt[3]{2} .$$