JMMO 2017

1. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36 \mid p-7$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$3p+10=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2 \\ =6n^2+6n+19,$$

од каде

$$3p=6n^2+6n+9,$$

односно

$$p=2n^2+2n+3=2n(n+1)+3.$$

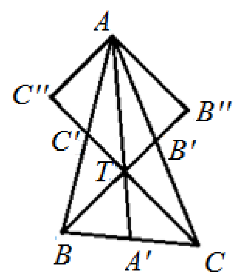
Ако еден од броевите n или $n+1$ е делив со 3, тогаш имаме контрадикција со тоа дека p е прост број. Значи, мора да важи $n=3k+1$. Тогаш,

$$\begin{aligned} p&=2(3k+1)(3k+1+1)+3 \\ &=2(3k+1)(3k+2)+3 \\ &=2(9k^2+9k+2)+3 \\ &=18k(k+1)+7. \end{aligned}$$

Бидејќи $k(k+1)$ е парен број, добиваме дека $36 \mid p-7$.

2. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека AA', BB' и CC' се тежишни линии во триаголникот кои се сечат во точка T и притоа важи $\overline{BA'}=\overline{A'T}$. На продолжението на CC' избираме точка C'' таква што $\overline{C'C''}=\frac{\overline{CC'}}{3}$, а на продолжението на BB' избираме точка B'' таква што $\overline{B'B''}=\frac{\overline{BB'}}{3}$. Докажи дека четириаголникот $TB''AC''$ е правоаголник.

Решение. Бидејќи AA' е тежишна линаја во $\triangle ABC$ и $\overline{BA'}=\overline{A'T}$ добиваме дека $\overline{A'T}=\frac{\overline{BC}}{2}$ т.е. A' е центар на опишана кружница околу $\triangle BCT$. Сега од Талесова теорема имаме $\measuredangle BTC=90^\circ$. Понатаму, $\measuredangle B''TC''=90^\circ$ (како накрсни агли). Бидејќи T е тежиште во $\triangle ABC$ имаме



$$\overline{C'T} = \frac{\overline{CC'}}{3} = \overline{C'C''}.$$

Од $\overline{BC'} = \overline{C'A}$ следува дека четириаголникот $BTAC''$ е паралелограм, па затоа $BT \parallel AC''$, од каде добиваме

$$\measuredangle TC''A = \measuredangle CTB'' = 180^\circ - \measuredangle B''TC'' = 90^\circ$$

(како агли над трансферзала).

Аналогно се докажува дека четириаголникот $TCB''A$ е паралелограм, т.е.

$$\measuredangle TB''A = \measuredangle C''TB'' = 90^\circ$$

(како агли над трансферзала). Според тоа,

$$\measuredangle C''AB'' = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

т.е. четириаголникот е правоаголник.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz = 1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2} + \frac{y^2+z^2+x}{y^2+2} + \frac{z^2+x^2+y}{z^2+2} \geq 3.$$

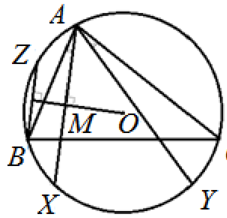
Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и условот на задачата следува

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2} + \frac{y^2+z^2+x}{y^2+2} + \frac{z^2+x^2+y}{z^2+2} &\geq \frac{2xy+z}{x^2+2} + \frac{2yz+x}{y^2+2} + \frac{2zx+y}{z^2+2} \\
&= \frac{2xyz+z^2}{z(x^2+2)} + \frac{2xyz+x^2}{x(y^2+2)} + \frac{2xyz+y^2}{y(z^2+2)} \\
&= \frac{2+z^2}{z(x^2+2)} + \frac{2+x^2}{x(y^2+2)} + \frac{2+y^2}{y(z^2+2)} \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{2+z^2}{z(x^2+2)} \cdot \frac{2+x^2}{x(y^2+2)} \cdot \frac{2+y^2}{y(z^2+2)}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 3.
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = x = 1$.

4. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.



Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Тогаш $OM \perp AX$. Повлекуваме нормала од B на OM и нека таа ја сече опишаната кружница во точката Z.

Од $BZ \perp OM$ следува дека OM е симетрала на BZ. Според тоа, $\overline{MZ} = \overline{MB}$. Сега од неравенството на триаголник следува

$$\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{ZM} + \overline{MC} > \overline{CZ}.$$

Но, $BZ \parallel AX$, па затоа

$$AZ = BX = CY$$

од каде добиваме

$$ZAC = ZA + AC = YC + CA = YCA$$

т.е. $\overline{CZ} = \overline{AY}$. Затоа $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.

5. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

Решение. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. Од условот на задачата имаме

$$p_1 + p_2 + ... + p_k = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k.$$

Го разгледуваме бројот на цифри на бројот n. Ако n има 4 цифри, тогаш има 4 различни прости делители. Тогаш $n \geq 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 10^4$ што не е можно. Ако n има $k > 4$ цифри, тогаш

$$\begin{aligned} n &\geq 2^{2+3+5+7+p_5+...+p_k-(k-1)} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p_5 \cdot ... \cdot p_k \\ &= 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^{p_5+...+p_k-(k-4)} p_5 \cdot ... \cdot p_k \\ &> 10^4 \cdot 10^{k-4} = 10^k \end{aligned}$$

што повторно не е можно. Значи, n е најмногу трицифрен.

Нека n е трицифрен. Тогаш $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$. Ако $5 | n$, тогаш

$$n \geq 2^8 \cdot 3 \cdot 5 > 10^3.$$

Добиваме дека простите фактори на бројот n се помали или еднакви на 3. Но прости броеви помали или еднакви на 3 се 2 и 3, а во факторизацијата на n влегуваат 3 прости броеви, што е противречност.

Нека n е двоцифрен број. Тогаш $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ако $5 | n$, тогаш

$$n \geq 2^6 \cdot 5 > 10^2.$$

Останува $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2}$, каде $\alpha_1 + \alpha_2 = 5$. Со директна проверка се добива дека

$$n = 2^4 \cdot 3 = 48, n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

се решенија.

Нека n е едноцифрен број. Тогаш само $n = 2^2$ го исполнува условот на задачата.