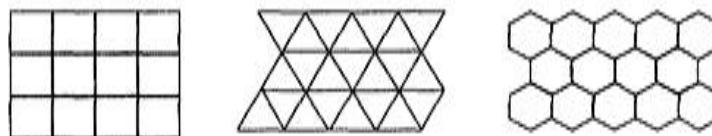


АПЕРИОДИЧНИ СКУПОВИ ПЛОЧИЦА

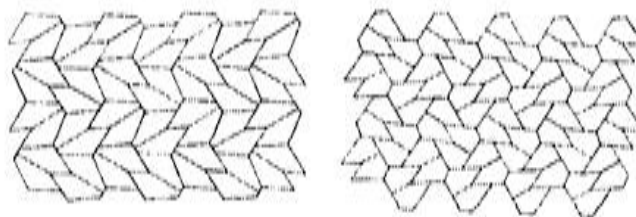
др Небојша Икодиновић, Београд

Познато је да се раван може *поплочати*, тј. покрити без преклапања и празнина, квадратама, једнакостраничним троугловима и правилним шестоугловима (слика 1), а да се не може поплочати, на пример, правилним петоугловима.



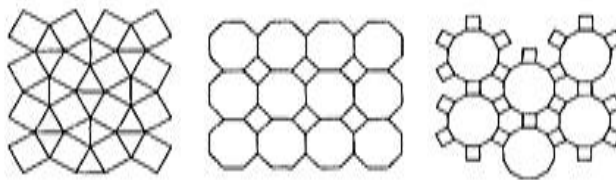
Слика 1. Поплочавања равни једним правилним полигоном.

Многи други облици могу поплочати раван, као, на пример, сваки од неправилних петоуглова приказаних на наредној слици.



Слика 2. Поплочавања равни једним (неправилним) петоуглом.

Разматрање поплочавања равни прилично се компликује повећавањем броја облика.

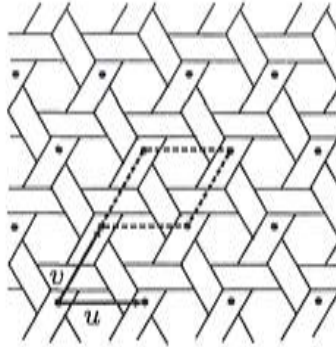


Слика 3. Поплочавања равни коришћењем више облика.

Сва поплочавања равни приказана на претходним сликама су *периодична*. Грубо говорећи, то значи да постоје бар два различита правца у поплочаној равни и на сваком од њих бесконачно много тачака из којих можемо посматрати поплочану раван а да оно што видимо буде један те исти шаблон, односно да нам поплочана раван изгледа потпуно исто када је посматрамо из било које од поменутих тачака. Математичким језиком, поплочавање је периодично ако постоје две независне транслације² равни које уочено поплочавање преводе

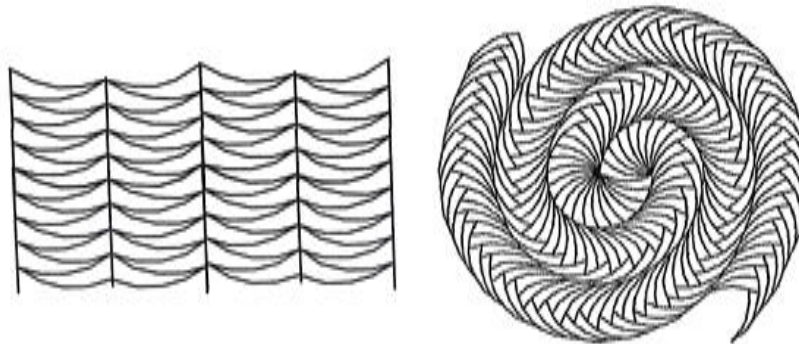
²Две транслације су независне уколико вектори који их одређују нису паралелни.

у себе. На пример, за периодично поплочавање приказано на слици 4, трансляције одређене векторима u и v преводе ово поплочавање у себе. Није тешко уочити да и свака трансляција одређена вектором $au + bv$, где су a и b неки цели бројеви, дато поплочавање преводи у њега самог.



Слика 4. Периодично поплочавање равни.

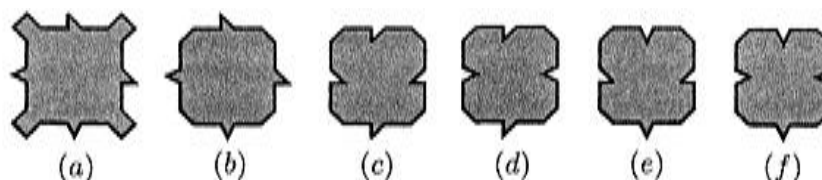
За свако периодично поплочавање равни постоји тзв. *паралелограм периода* одређен векторима трансляција које то поплочавање преводи у себе. Пример поплочавања које није периодично дат је на слици 5 десно. Занимљиво је да се плочица која се користи за ово поплочавање може ређати и периодично (слика 5 лево). Ову особину имају многи други коначни скупови дозвољених облика.



Слика 5. Периодично и неперидично поплочавање равни једном плочицом.

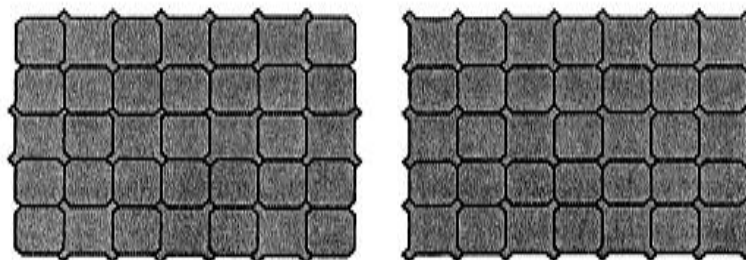
Постоји ли коначан скуп дозвољених облика који се могу ређати само неперидично?

Одговор на постављено питање је потврдан. Један такав скуп дозвољених облика дат је на слици 6. Овај скуп плочица је открио амерички математичар Рафаел Робинсон 1971. године. Коначни скупови плочица (тј. дозвољених облика) којима се раван може поплочавати само неперидично називају се *аперидични* скупови плочица. Пре него што докажемо да Робинсонове плочице представљају један пример *аперидичног* скуп плочица, истичемо да је аперидичност својство скупа дозвољених облика, а не својство неког поплочавања.



Слика 6. Робинсонове плочице.

Није тешко приметити да су све Робинсонове плочице добијене различитим модификацијама углова и страница квадрата. Ако, за тренутак, занемаримо модификације страница и пажњу усмеримо само на углове, видећемо да постоје два типа плочица: са „проширеним“ угловима (плочица (a)) и са „одсеченим“ угловима (плочице (b) – (f)). Очигледно је да оваквим плочицама можемо покрити читаву раван (слика 7) и да се плочице са „проширеним“ угловима морају наизменично ређати у сваком другом реду (слика 7 лево), или наизменично у свакој другој колони, или оба (слика 7 десно).

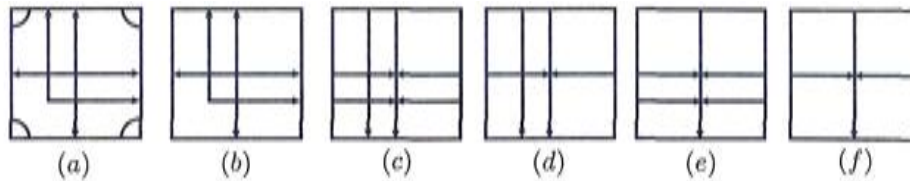


Слика 7. Два поплочавања равни „квадратима“ са проширеним и одсеченим угловима.

Као што ћемо видети, странице су модификоване тако да форсирају појављивање плочице са „проширеним“ угловима, тј. плочице (a), у наизменичним редовима и наизменичним колонама (као на слици 7 десно) у свакој полуравни.

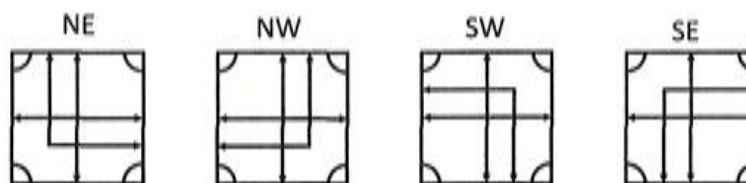
Размотримо сада модификације страница. Свака плочица има на страницама или удубљење или испупчење, при чему постоје два типа и једних и других. Једну врсту удубљења, односно испупчења ћемо називати *симетричним*, а другу *асиметричним*. Да бисмо једноставније описивали плочице, модификације страница ћемо означавати стрелицама унутар квадрата, док ћемо „проширења“ углова истицати луковима који одговарају угловима квадрата. На странице квадрата на којима се налазе испупчења наслањаћемо главе стрелица, а на странице са удубљењима ослањаће се репови стрелица. При томе, уколико се на страницу наслања само једна глава стрелице, онда је та страница модификована симетричним испупчењем, а ако се на страницу наслањају две главе онда је та страница модификована асиметричним испупчењем. Исто важи за удубљења и репове стрелица. У складу са овим договорима, Робинсонове стрелице можемо представити као на слици 8.

При оваквој репрезентацији Робинсонових плочица, тачно једна плочица са истакнутим луковима се мора појављивати у сваком темену поплочавања и на сваку главу стрелице на некој страници квадрата се морају надовезати репови наслоњени са одговарајућу страницу суседне плочице.



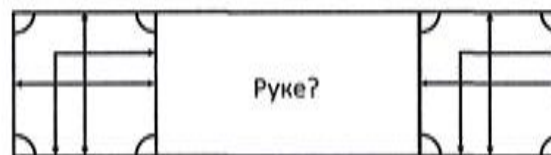
Слика 8. Квадрати са стрелицама који одговарају Робинсоновим плочицама.

Плочицу (a) и плочицу (b) зваћемо *крст*, а сваку од преосталих плочица (c) – (f) *рука*. Оријентацију крста одређује „изломљена двоглава стрелица“, тзв. *лака* крста. Ако је крст постављен као на слици 8 (a или b) рећи ћемо да је северно-источно оријентисан или да је NE оријентисан.



Слика 9. Оријентација крста.

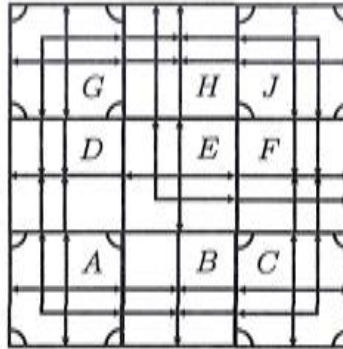
Већ смо закључили да се *крстови* типа (a) морају ређати наизменично у наизменичним редовима (на пример), и при томе је очигледно да су *руке* плочице које се налазе међу њима. Важно је приметити и да су свака два крста у истом реду (или истој колони) која су раздвојена само рукама, окренута један према другом „лицем у лице“ или су постављени „леђа у леђа“, тј. или се *лака* сваког од ова два крста савија ка другом или се њихови *лакови* савијају један од другог. Предлажемо да се у ово и директно уверите. Покушајте да рукама повезате два крста за које не важи претходно правило (на пример, крстове на слици 10).



Слика 10. Могу ли се ова два крста повезати рукама?

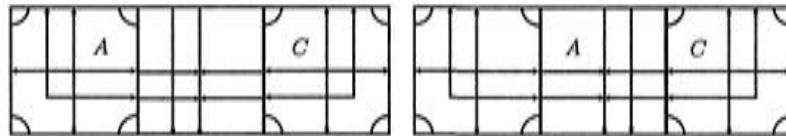
Започнимо сада поплочавање равни Робинсоновим плочицама. Пођимо од једног крста типа (a) који свакако мора бити употребљен приликом поплочавања. Надовежимо затим на њега плочице у складу са оријентацијом овог крста. Ако је крст NE оријентисан, додаћемо плочице изнад (северно) и десно (источно). Једна могућност је приказана на слици 11. Приметимо да плочица D мора бити рука и да би одговарала плочици A мора бити типа (c), (d) или (e). У сваком од случајева, на десну страну плочице D се наслања реп једне или две стрелице (тј. страница садржи удубљење). Исто важи и за плочицу F. Одавде закључујемо да E мора бити крст и претпоставићемо да је његова оријентација NE (као на слици 11).

Овакав избор плочице E форсира да B и D буду типа (e) , а да F буде типа (c) . Наравно, крст E је типа (b) , тј. крст са одсеченим угловима. Сада је очигледно да H не може бити крст, а да G и J морају бити крстови типа (a) . Плочица H је рука типа (c) .



Слика 11. 3×3 -блок.

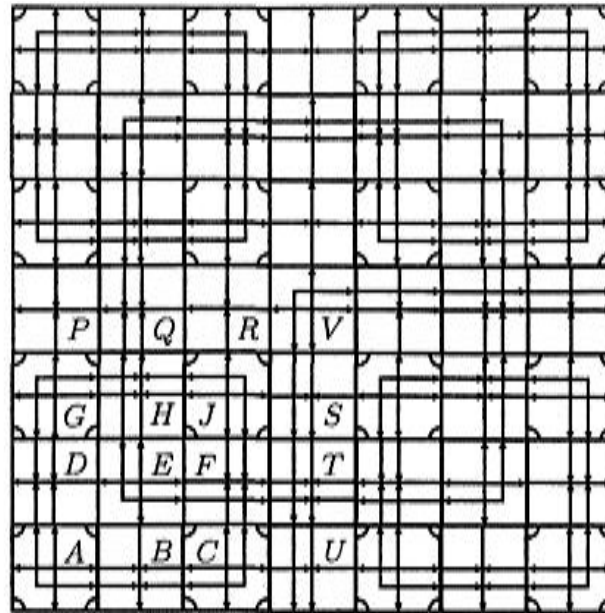
На слици 11 је изабрано да плочица B буде типа (e) , али је очигледно да B може бити плочица типа (c) постављена на један од два могућа начина (слика 12).



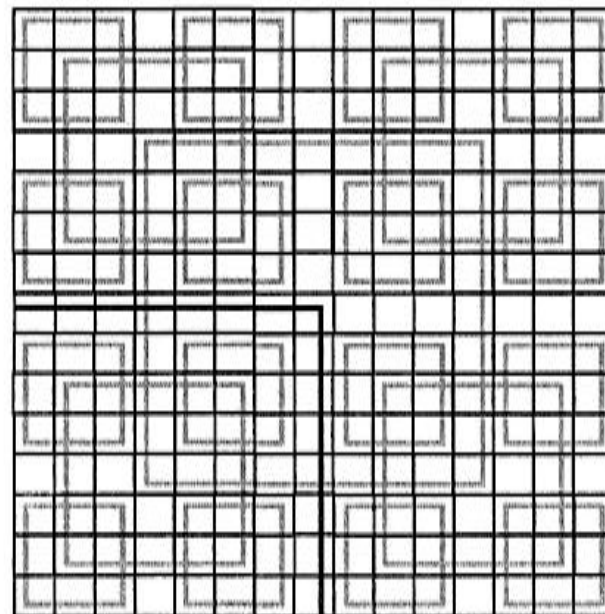
Слика 12. Друге могућности повезивања крстова A и C .

На основу претходне анализе, закључујемо да се све могуће варијанте 3×3 -блокова разликују једино по оријентацији централног крста и изабраних руку које су му суседне. Приметимо да стрелице руку које су суседне централном крсту „зраче“ из овог крста. Сваки овакав блок такође има своју оријентацију одређену оријентацијом свог централног крста.

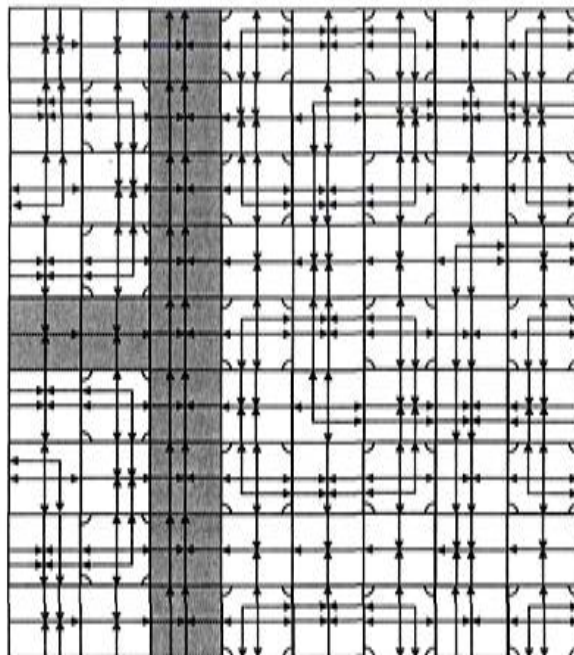
Добијени 3×3 -блок даље ћемо проширити до 7×7 -блока и то у складу са оријентацијом 3×3 -блока. Одређености ради, кренућемо од 3×3 -блока приказаног на слици 11 чији је централни крст NE оријентисан. Очигледно, плочице P , Q и R , уз горњу ивицу 3×3 -блока, морају бити руке и једна могућност је да буду редом типа (f) , (e) , (f) (као што је приказано на слици 13), или (d) , (c) , (d) . Сличне могућности се појављују за плочице S , T , U , одакле закључујемо да плочица V мора бити крст типа (b) (крст са одсеченим угловима). Расуђујући на овај начин комплетирамо 7×7 -блок у чијем се средишту налази крст, на кога се у свим смеровима надовезују по три руке чије стрелице *зраче* из централног крста, док се у сваком „квадранту“ одређеном овим рукама налази по један 3×3 -блок. Све могуће варијанте 7×7 -блокова разликују се по оријентацији централног крста и рукама које се на њега надовезују.

Слика 13. 7×7 -блок.

На аналоган начин се 7×7 -блокови проширују до 15×15 -блокова, и тако даље. Уопште, $(2^{n-1} - 1) \times (2^{n-1} - 1)$ -блок проширује се до $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ -блока, за сваки природан број n . При томе, оријентација проширења неког квадратног блока одређена је избором оријентације његовог централног крста. На пример, ако је SE оријентација централног крста 7×7 -блока, да би се формирао 15×15 -блок преостали 7×7 -блокови морају бити постављени испод и десно од полазног 7×7 -блока.

Слика 14. 15×15 -блок.

Дакле, ако увек бирамо да централни крст новог блока буде исте оријентације поплочаћемо четвртину равни, тј. један квадрант. Ако су сви централни крстови оријентисани, на пример, на исток, а бесконачно много њих је усмерено ка северу и бесконачно много њих ка југу, онда ћемо поплочати полураван. Најзад, ако је бесконачно много централних крстова оријентисано на сваки од четири могућа начина поплочаћемо целу раван. Осим у овом последњем случају, да бисмо поплочали целу раван потребно је спојити четири квадранта, два квадранта и једну полураван или две полуравни. Ово се може постићи постављањем тзв. *граница* које су сачињене од бесконачног низа плочица типа (d) или (f) као што је приказано на слици 15.



Слика 15. Повезивање два квадранта и једне полуравни.

Описана конструкција даје сва могућа поплочавања равни Робинсоновим плочицама. Предлажемо читаоцу да се методом „покушаја и погрешке“ увери да се раван заиста може поплочати само уколико се $(2^{n-1}-1) \times (2^{n-1}-1)$ -блокови проширују до $(2^n-1) \times (2^n-1)$ -блокова на описани начин.

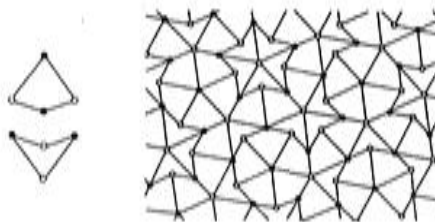
Није тешко закључити да постоји бесконачно (чак непребројиво) много различитих начина на који се раван може поплочати Робинсоновим плочицама. Међутим, иако има бесконачно много различитих поплочавања равни овим плочицама сва она су неперидична. Другим речима скуп Робинсонових плочица (облика) је *аперидичан*. Да бисмо се уверили у то показаћемо да за било које поплочавање равни *не постоји* translација којом се дато поплочавање пресликава у себе. Другим речима, без обзира на то како транслирали поплочавање дато Робинсоновим плочицама, постојаће плочица која неће бити иста као плочица у коју је транслирана. Слободније речено, не постоје две плочице из којих поплочавање изгледа исто. Довољно је доказати да не постоје translације чији су вектори паралелни странама квадрата.

Замислимо да се налазимо на једном од крстова датог поплочавања. Као што је описано, овај крст је део 3×3 -блока добијеног проширивањем крста на коме стојимо сагласно његовој оријентацији. Посматрајмо сада поменути 3×3 -блок и запамтимо распоред плочица које га образују. Померимо ли се затим за четири плочице хоризонтално или вертикално наћи ћемо се у унутрашњости неког другог 3×3 -блока. Међутим, распоред плочица које видимо унутар њега неће бити исти као унутар 3×3 -блока из кога долазимо. Наиме, централни крст 3×3 -блока у коме се сада налазимо није исто оријентисан као централни крст 3×3 -блока из кога долазимо. Наравно, померањем за 2 или 3 плочице хоризонтално или вертикално наилазимо на сасвим другачији распоред плочица.

Вратимо се сада на крст у коме смо били и запамтимо распоред плочица одговарајућег 7×7 -блока. Ако се сада померимо за осам плочица хоризонтално или вертикално, наћи ћемо се унутар неког другог 7×7 -блока чији је централни крст другачије оријентисан од централног крста 7×7 -блока из кога долазимо. Такође, шаблон неће бити сачуван ако се померимо за 5, 6 или 7 плочица хоризонтално или вертикално.

Уопште, закључујемо да се померањем за 2^n плочица хоризонтално или вертикално поглед на $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ -блок из кога долазимо и на $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ -блок у који смо стигли неће бити исти. Другим речима, за свако n можемо наћи два крста која нису исто оријентисана и који су удаљени за 2^n плочица хоризонтално или вертикално (то су централни крстови $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ -блокова). Очигледно је да се померањем за мање од 2^n плочица хоризонтално или вертикално не може доћи на идентично постављену плочицу. Пошто n може бити произвољно велико, следи да не постоји translација чији је вектор паралелан страницама квадрата и која дато поплочавање пресликава у себе. Дакле, свако поплочавање равни Робинсоновим плочицама је непериодично па је овај скуп плочица апериодичан.

Постоји још апериодичних скупова плочица. Најпознатији су тзв. скупови Пенроузових плочица (http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling).



Слика 16. Пенроузов апериодичан пар плочица: змај и стрелица.

На крају напоменимо да апериодични скупови плочица нису занимљиви само љубитељима мозгалица, већ да су, на помало изненађујући начин, повезани са најразличитијим областима математике и физике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman, New York, 1987.
- [2] R. Penrouz, *Carev novi um*, Informatika, Beograd, 2004.
- [3] M.R. Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Invent. Math, 12, 1971.

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ
на Србија во 2011/12 година**