

ММО 2015

1. Нека AH_A, BH_B, CH_C се висини во $\triangle ABC$. Низ темињата A, B, C се повлечени нормални прави p_A, p_B, p_C кон H_BH_C, H_CH_A, H_AH_B , соодветно. Докажи дека p_A, p_B, p_C минуваат низ иста точка.

Решение. *Прв начин.* Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека секоја од правите p_A, p_B, p_C минува низ точката O . Од причини на симетрија, доволно е да докажеме дека $OC \perp H_AH_B$. Нека D е пресечната точка на овие две прави. Нека $\triangle ABC$ е остроаголен (направи цртеж). Јасно,

$$\angle H_ACD = \angle BCO = 90^\circ - \alpha$$

Четириаголникот ABH_AH_B е тетивен, па затоа

$$\angle DH_AC = \angle H_BH_AC = \alpha.$$

Сега од последните равенства следува $OC \perp H_AH_B$. Аналогно се разгледува случајот кога $\triangle ABC$ е тупаголен.

Втор начин. Според теоремата на Карно, потребно и доволно е да докажеме дека важи

$$|AH_B|^2 - |AH_C|^2 + |BH_C|^2 - |BH_A|^2 + |CH_A|^2 - |CH_B|^2 = 0.$$

Последното равенство следува ако ги собереме очигледните равенства:

$$|BH_C|^2 - |AH_C|^2 = |BC|^2 - |AC|^2,$$

$$|CH_A|^2 - |BH_A|^2 = |AC|^2 - |AB|^2, \text{ и}$$

$$|AH_B|^2 - |CH_B|^2 = |AB|^2 - |BC|^2.$$

2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Решение. Ако во познатото неравенство

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx),$$

земеме $x=a^2b, y=b^2c, z=c^2a$ добиваме

$$\begin{aligned}(a^2b + b^2c + c^2a)^2 &\geq 3(a^2b \cdot b^2c + b^2c \cdot c^2a + c^2a \cdot a^2b) \\ &= 3abc(b^2a + c^2b + a^2c) = 3(b^2a + c^2b + a^2c).\end{aligned}$$

Понатаму, од од условот $abc=1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(a^2b + b^2c + c^2a)^2 &= (a^2b + b^2c + c^2a)(a^2b + b^2c + c^2a) \\ &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}(a^2b + b^2c + c^2a) = 3(a^2b + b^2c + c^2a)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(a^2b + b^2c + c^2a)^2 &= (a^2b + b^2c + c^2a) \cdot (a^2b + b^2c + c^2a) \\ &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.\end{aligned}$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства последователно добиваме

$$\begin{aligned}3(a^2b + b^2c + c^2a)^2 &\geq 3(b^2a + c^2b + a^2c) + 3(a^2b + b^2c + c^2a) + 9abc \\ &= 3(a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c + 3abc) \\ &= 3(a+b+c)(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

односно

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

3. Натпреварувачите на овогодинешната ММО “добро” се распоредени во n колони (рапоредување по колони е “добро” ако во иста колона не се појавуваат познаници), но истото не може да се постигне во помалку од n колони. Покажи дека постојат натпреварувачи $M_1, M_2, \dots, M_n$ за кои важи следново:

- (1) M_i е во i -тата колона, за секој $i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) M_i е познаник со M_{i+1} , за секој $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Решение. Ќе извршиме прераспоредувања по колони. Најпрво, од втората колона го префрламе во првата колона секој натпреварувач кој нема познаник во првата колона. Новото распоредување е добро, па затоа во втората колона останал барем еден натпреварувач. Сега од третата колона го префрламе во втората колона секој натпреварувач кој нема познаник меѓу преостатаните во втората колона. Новото распоредување повторно е добро, па затоа во третата колона останал барем еден натпреварувач итн. За крај, од n -тата колона го префрламе во $(n-1)$ -вата колона секој натпреварувач кој нема познаник меѓу преостатаните во $(n-1)$ -вата колона. Добиеното распоредување повторно е добро, па затоа во n -тата колона останал барем еден натпреварувач. Означуваме еден таков со M_n . Мора да постои негов познаник M_{n-1} во $(n-1)$ -вата колона. Да забележиме дека M_{n-1} не е преместуван (во спротивно првичното распоредување не е добро). Затоа M_{n-1} има познаник M_{n-2} во $(n-2)$ -вата колона. Аналогно заклучуваме дека M_{n-2} не е преместуван итн. На овој начин се пронајдени натпреварувачи $M_1, M_2, \dots, M_n$ за кои важат условите (1) и (2).

4. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B . Права низ B , по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точки C и D , соодветно, при што C лежи надвор од k_2 , а D надвор од k_1 . Нека M е пресечната точка на тангентите кон k_1 и k_2 повлечени низ C и D , соодветно, и $AM \cap CD = \{P\}$. Тангентата повлечена низ B кон k_1 ја сече AD во точка L , а тангентата повлечена низ B кон k_2 ја сече AC во точката K . Нека $KP \cap MD = \{N\}$ и $LP \cap MC = \{Q\}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

Решение. Од причини на симетрија, доволно е да се докаже дека важи $KP \parallel MC$. Најпрво ќе докажеме дека четириаголникот $ACMD$ е тетивен. Имено, да забележиме дека B лежи на отсечката CD , а A и M се на различни страни од правата CD . Од $\angle BDM = \angle DAB$ и $\angle BCM = \angle BAC$, следува

$$\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = \angle BDM + \angle BCM = 180^\circ - \angle DMC.$$

Понатаму, ќе докажеме дека B и P лежат на ист кружен лак над точките A и K . За таа цел, разгледуваме два случаи:

Прв случај. Точката P лежи на отсечката BC . Да забележиме дека точките A и B се од иста страна на правата KP . Нека со E го означиме пресекот на правите KB и DM . Имаме низа равенства

$$\angle KBP = \angle DBE = \angle BDE = \angle CDM = \angle CAM = \angle KAP.$$

Тогаш, од $\angle KBP = \angle KAP$ следува дека четириаголникот $AKPB$ е тетивен.

Втор случај. Точката P лежи на отсечката AC . Сега точките A и B се од различни страни на правата KP . Повторно, нека E е пресекот на KB и DM . Ја имаме следната низа равенства

$$180^\circ - \angle KBP = \angle DBE = \angle BDE = \angle CDM = \angle CAM = \angle KAP,$$

од што следува дека четириаголникот $AKBP$ е тетивен.

Така добиваме дека $\angle APK = \angle ABK = \angle ADB = \angle ADC = \angle AMC$, Од што следува дека $KP \parallel MC$.

5. Определи ги сите природни броеви m кои имаат точно три различни прости делители p , q и r , такви што:

- а) $p-1 \mid m$, $qr-1 \mid m$,
 б) $q-1 \nmid m$, $r-1 \nmid m$, $3 \nmid q+r$.

Решение. Бројот m можеме да го претставиме во облик $m = p^a q^b r^c$. Броевите q и r не можат да бидат 2, бидејќи $2-1=1$ е делител на секој природен број, од каде следува дека се непарни, то ест $qr-1$ е парен, па мора m да биде парен, то ест $p=2$.

Од $\text{NZD}(q, qr-1)=1=\text{NZD}(r, qr-1)$ и $qr-1 \mid m$, следува дека $qr-1 \mid 2^a$, од каде $qr-1=2^k$ за некој природен број $k \leq a$. Ова значи дека бројот 2^k+1 има точно два делители. Бројот k може да се претстави во облик $k=2^t s$, каде t е најголемиот степен на 2 во k , а s е најголемиот непарен делител на k . Ако $s > 1$, тогаш:

$$2^k+1=(2^{2^t})^s+1=(2^{2^t}+1)((2^{2^t})^{s-1}-(2^{2^t})^{s-2}+\dots-(2^{2^t})+1).$$

Последното е можно само ако

$$q=2^{2^t}+1, r=(2^{2^t})^{s-1}-(2^{2^t})^{s-2}+\dots-(2^{2^t})+1$$

или обратно, но тогаш $q-1=2^{2^t} \mid m$ или $p=2^{2^t} \mid m$, што противречи на условите на задачата.

Следува дека $s=1$, то ест $k=2^t$ е степен на 2 и $qr=2^{2^t}+1$, то ест $2^{2^t}+1$ е производ на два прости броеви. За $t=0$ имаме $2^{2^0}+1=3$ и ова очогледно не е случај, па затоа $t > 1$.

Од

$$2^{2^t}+1 \equiv 2^{2 \cdot 2^{t-1}}+1 \equiv (2^2)^{2^{t-1}}+1 \equiv 4^{2^{t-1}}+1 \equiv 1^{2^{t-1}}+1 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod{3},$$

следува дека $3 \nmid q$ и $3 \nmid r$. Ако $q \equiv r \pmod{3}$, тогаш $qr \equiv 1 \pmod{3}$, па мора едниот да е конгруентен со еден, а другиот со два, но тогаш нивниот збир е делив со три, што противречи на последниот услов од задачата, т.е. број кој ги задоволува дадените услови не постои.