Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

МАТЕМАТИКА НА ПРАВОАГОЛНА ТАБЛА (ВТОР ДЕЛ)

Во првиот дел од оваа статија претежно разгледавме задачи со боење и покривање на табла со дадена димензија. Покрај тоа беа дадени и неколку задсачи поврзани со пресметувања во врска со броевите запишани во полињата на дадена табла. Во овој дел покрај што ќе презентираме неколку задачи поврзани со пресметувања на броевите запишани во полињата на дадена табла, ќе разгледаме и задачи со пресметување на бројот на боењата на табла при дадени услови.

1. Дадена е табла 2012×2012. Во секое поле од првата колона е запишан бројот 1, во секое поле од втората колона е запишан бројот 2 итн. во секое поле од 2012-тата колона е запишан бројот 2012. Потоа се избришани броевите на дијагоналата која ги поврзува горното лево и долното десно поле. Определи колку пати збирот на броевите над избришаната дијагонала е поголем од збирот на броевите под дијагоналата.
   Решение. За секое од разгледаните дијагонални полиња ќе ги пресметаме збирот на броевите запишани лево од него и збирот на броевите запишани над него. На пример, лево од полето во $k-$тиот ред и $k-$тата колона се броевите $1,2,...,k-1$ и нивниот збир е $\frac{k(k-1)}{2}$, а над него се запишани $k-1$ броеви, секој од кои е еднаков на k, па нивниот збир е еднаков на $k(k-1)$, т.е. е два пати поголем. Значи, збирот на броевите над дијагоналата е два пати поголем од збирот на броевите под дијагоналата.

2. Горјан ги пополнува полињата на табела 8×8 така што за секој i од 1 до 8 важи:
   - секој број во $i-$тиот ред е поголем или еднаков на i,
   - секој број во $i-$тата колона е поголем или еднаков на i.

   Определи го најмалиот можен збир на броевите кои ги запишал Горјан.
   Решение. Во осмиот ред и осмата колона се запишани вкупно 15

броја и сите мора да се еднакви на 8. Сега во седмиот ред и седмата колона остануваат 13 броја кои мора да се поголеми или еднакви на 7, па во шестиот ред и шестата колона остануваат 11 броеви кои мора да се поголеми или еднакви на 6 итн. Конечно, најмалиот можен збир на броевите кои ги запишал Горјан е

$$15\cdot 8+13\cdot 7+11\cdot 6+9\cdot 5+7\cdot 4+5\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 1=372.$$

3. Во полињата на 3×3 табла се запишани позитивни броеви. Производот на броевите во секој ред и во секоја колона е еднаков на 1, а производот на броевите во секој 2×2 квадрат е еднаков на 2. Кој број е запишан во централниот квадрат? Дади пример на таква табла.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Решение. Нека таблата има вид како што е на цртежот десно. Тогаш бидејќи производот на броевите во првите две колони е 1, а производот на броевите во левот долен квадрат е 2, добиваме дека $ab=\frac{1}{2}$. Аналогно се добива дека $cf=hi=dg=\frac{1}{2}$. Производот на овие четири пара е еднаков на $\frac{1}{16}$. Но, од условот на задачата следува дека производот на сите броеви запишани на таблата е еднаков на 1. Според тоа,

$$e=\frac{1}{abcdfghi}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16.$$

Пример на табла од саканиот вид е таблата во која

$$a=c=i=g=2 \text{ и } b=f=h=d=\frac{1}{4}.$$

4. Во секое поле на правоаголна табла е запишан број. За таблата ќе велиме дека е интересна, ако збирот на броевите во секој ред е еднаков и ако збирот на броевите во секоја колона е еднаков. Дали постои
а) интересна табла 3×5 во која се запишани броевите од 1 до 15,
б) интересна табла 4×5 во која се запишани броевите од 1 до 20.

1	15	4	9	11
10	7	6	12	5
13	2	14	3	8

Решение. а) Збирот на броевите од 1 до 15 е еднаков на $15\cdot 8=120$, па затоа ако постои интересна 3×5 табла, тогаш во секој ред збирот на броевите треба да е еднаков на $120:3=40$, а во секоја колона на $120:5=24$. Пример на ваква интересна табла е прикажан на цртежот десно.

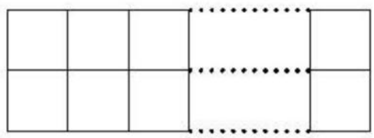
б) Збирот на броевите од 1 до 20 е еднаков на $10\cdot 21=210$. Но, 210 не е делив со 4, па затоа броевите од 1 до 20 не може да се распоредат во четири реда со еднакви збирови. Значи, не постои интересна табла 4×5 во која се запишани броевите од 1 до 20.

5. Нека $n\in\mathbb{N}$. На колку начини од квадратна табла со димензии $2n\times2n$ може да се отстранат две полиња така што преостанатиот дел од таблата може да се покрие со домина 2×1?

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски. Ако е можно таблата да се покрие со домина, тогаш отстранетите полиња се разнобојни. Обратно, нека отстранетите полиња се разнобојни. Не е тешко да се конструира затворена верига од соседни по страна полиња, која ја покрива целата табла. Оваа верига отстранетите полиња ја делат на две отворени вериги, секоја од кои започнува со бело и завршува со црно поле, па затоа секоја од овие вериги може да се покрие со домина. Тоа значи дека таблата од која се отстранети разнобојни полиња може да се покрие со домина.

Таблата има $4n^2$ полиња, од кои $2n^2$ се бели и $2n^2$ се црни. Според тоа, изборот на две разнобојни полиња може да се направи на $2n^2\cdot2n^2=4n^4$ начини.

6. Дадена е табла 2×2023. Секое поле од таблата треба да се обои во сина, зелена или црвена боја така, што секои две соседни полиња се разнобојни. На колку начини може да се обои таблата? (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)



Решение. Да почнеме да ја боиме таблата од првата колона од лево. Полето во првиот ред можеме да го обоиме на 3 начини, по што полето во вториот ред можеме да го обоиме на 2 начина. Според тоа, првата колона можеме да ја обоиме на $3\cdot2=6$ начина. Лесно се гледа дека за секое боење на првата колона втората колона можеме да ја обоиме на 3 начини. Понатаму, за секое боење на првата и втората колона третата колона можеме да ја обоиме на 3 начини итн. Конечно, таблата на опишаниот начин можеме да ја обоиме на

$$6\cdot3^{2022}=2\cdot3^{2023}.$$

7. На колку начини може да се обои секое поле на 3×3 табла во сина, црвена или зелена боја, така што соседните по страна полиња се

разнобојни?

Решение. Има три можности за централното поле. Нека тоа е сино. Тогаш сини полиња може да има само во аглите. Ако други сини полиња нема, тогаш за преостанатите полиња има 2 можни (шаховски) боења. Ако има уште 1 сино поле (од 4 можни), тогаш за преостанатите полиња полиња има 2 можни (шаховски) боења. Ако има уште 2 сини полиња (6 можни парови), тогаш за преостанатите полиња има $2^2=4$ можни боења. Ако има уште 3 сини полиња (4 можни тројки), тогаш за преостанатите полиња има $2^3=8$ можни боења. Ако има уште 4 сини полиња (сите аголни полиња), тогаш за преостанатите полиња има $2^4=16$ можни боења.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека има

$$3(2+4\cdot 2+6\cdot 2+4\cdot 8+16)=246$$

можни боења на саканиот начин.

8. На колку начини може да се обојат сите полиња на табла 3×3 со жолта, сина, зелена или црвена боја, така што соседните по страна полиња се разнобојни?

Решение. За централното поле на таблата има 4 можности. Нека тоа е сино. Тогаш други сини полиња може да се само аголните полиња. Ако има уште 1 сино поле (од 4 можности), тогаш за преостанатите 7 полиња има $3\times 2^6=192$ можности за боење. Ако има уште 2 сини полиња (6 можни парови), тогаш преостанатите 6 полиња се поделени во 2 групи за кои има $3^2\cdot 2^4=144$ можни боења. Ако има уште 3 сини полиња (4 можни тројки), тогаш преостанатите 5 полиња се поделени во 3 групи за кои има $3^3\cdot 2^2=108$ можни боења. Ако има уште 4 сини полиња (сите аголни полиња), тогаш за преостанатите полиња има $3^4=81$ можни боења. Ако други сини полиња нема, да видиме колку и каде се жолтите полиња. Ако жолти полиња нема, тогаш за осумте полиња има 2 можни (шаховски) боења во црвена и зелена боја. Ако има 1 жолто поле (од 8 можности), за преостанатите 7 полиња има 2 можни (шаховски) боења во црвена и зелена боја. Ако има 2 жолти полиња (од $\frac{8\cdot 5}{2}=20$ можни парови), преостанатите 6 полиња се поделени во 2 групи, за кои има $2^2=4$ можни боења. Ако има 3 жолти полиња (16 можни тројки), преостанатите 5 полиња се поделени во три групи, за кои има $2^3=8$ можни боења. Ако има 4 жолти полиња (2 можни четворки), за преостанатите полиња има $2^4=16$ можни боења.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека има

$4(4\cdot 192+6\cdot 144+4\cdot 108+81+8\cdot 2+20\cdot 4+16\cdot 8+2\cdot 16)=4\cdot 2401=9604$

можни боења на саканиот начин.

9. Во секое поле на табла со 2011 редови и 2012 колони е запишан еден од броевите 0, 1 и 2. Познато е дека збирот на броевите во секој ред и во секоја колона е делив со 3. Колку најмногу единици може да има запишано на таблата?

Решение. Нека на таблата се запишани n нули и d двојки. За да збирот на броевите во секој ред биде делив со 3, во него треба да има барем една двојка или две нули. Според тоа, $d+\frac{n}{2}\geq 2011$. Аналогно, во секоја колона има или барем две двојки или една нула, па затоа $n+\frac{d}{2}\geq 2012$. Ги собираме двете неравенства и добиваме

$$\frac{3}{2}(n+d)\geq 4023,\text{ т.е. } n+d\geq 2682.$$

Значи, на таблата се запишани најмногу $2011\cdot 2012-2682=4043450$ единици. Пример за добиената оценка конструираме на следниов начин: на таблата запишуваме 1342 нули и тоа по две во ред, почнувајќи од горниот лев агол (во 671 ред и 1342 колони) и 1340 двојки по две во колона, почнувајќи од долниот десен агол (во 1340 реда и 670 колони) а во другите полиња ставаме единици (вид цртеж)

0	0	1	1	...	1	1	1	...	...	1
1	1	0	0	...	1	1	1	...	...	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	...	0	0	1	...	...	1
1	...	...	...	...	...	1	2	1	...	1
1	...	...	...	...	...	1	2	1	...	1
1	...	...	...	...	...	1	1	2	...	1
1	...	...	...	...	...	1	1	2	...	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	...	...	...	...	...	1	1	1	...	2
1	...	...	...	...	...	1	1	1	...	2

10. Дали е можно да ги обоиме полињата на квадратна табла со димензии

19×19 во жолта, сина, кафеава и зелена боја така што секој правоаголник $a\times b\,(a,b\geq 2)$ составен од полиња на таблата, да има барем две разнобојни аголни полиња?

Решение. Не. Да претпоставиме дека такво боење е можно. Нека во даден ред имаме j жолти, s сини, k кафеави и z зелени полиња. Бројот на еднобојни парови во тој ред е

$$\begin{aligned}\frac{j(j-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{z(z-1)}{2}&=\frac{j^2+s^2+k^2+z^2-19}{2}\\&\geq\frac{\frac{(j+s+k+z)^2}{4}-19}{2}\\&=\frac{19(19-4)}{8}\end{aligned}$$

и како овој број е природен, тој е поголем или еднаков на 36. Ако во еден ред има 4 полиња од една боја и по 5 полиња од другите три бои, тогаш овој број е точно $\frac{4\cdot(4-1)}{2}+3\cdot\frac{5(5-1)}{2}=36$. Непосредно може да се увериме дека тоа е единствениот случај во кој истобојните парови во еден ред се точно 36. Според тоа, во сите редови имаме најмалку $19\cdot 36$ еднобојни парови позиции.

Од друга страна, ако саканото боење е можно, тогаш секој пар позиции може да се среќава најмногу во еден ред во секоја боја. Така еднобојните парови позиции од дадена боја се најмногу $\frac{19(19-1)}{2}=19\cdot 9$. Вкупно за четирите бои имаме најмногу $4\cdot 19\cdot 9=19\cdot 36$ еднобојни парови позиции. Но, претходно видовме дека еднобојните парови позиции се најмалку $19\cdot 36$, па затоа имаме точно $19\cdot 36$ еднобојни парови позиции. Според тоа, во секој ред мора да има 4 полиња обоени во една боја и по 5 полиња обоени во секоја од другите три бои. Нека r е бројот на редовите во кои има 4 кафеави полиња. Тогаш вкупниот број парови кафеави полиња во еден ист ред ќе биде еднаков на $r\cdot\frac{4(4-1)}{2}+(19-r)\cdot\frac{5(5-1)}{2}=2(95-2r)$ и тоа е парен број, па затоа не може да е еднаков на $19\cdot 9$, што е противречност.

11. Правоаголник 20×21 е поделен на единечни квадрати, а потоа се расекува на квадрати чии темиња се во темињата на единечните квадрати. Определи го најмалиот можен број од добиените квадрати кои се со непарна страна.

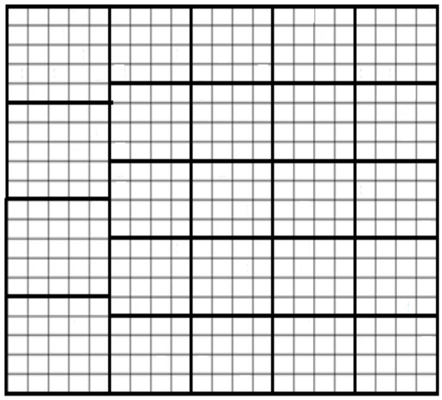
Решение. Плоштината на правоаголникот е парен број, квадрат чија страна е парен број има парна плоштина, а квадрат чија страна е непарен број има непарна плоштина. Затоа бројот на квадратите кои имаат непарна страна мора да е парен. Ако имаме два квадрати со непарни страни $a=2k+1$ и $b=2m+1$, тогаш нивната вкупна плоштина ќе биде

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 2k^2+4k+1+4m^2+4m+1 \\ &= 4(k^2+k+m^2+m)+2 \\ &= 4A+2. \end{aligned}$$

Оттука следува дека вкупната плоштина на квадратите кои имаат парни страни треба да е еднаква на

$$\begin{aligned} S &= 20\cdot 21-4A-2 \\ &= 4(104-A)+2, \end{aligned}$$

што не е можно бидејќи плоштината на секој од нив е делива со 4, а при делење на S со 4 се добива остаток 2. На цртежот десно е даден пример на поделба со 4 квадрати со непарни страни.



12. Од лист со квадратчиња 1×1 е исечен правоаголник со димензии 20×10. Правоаголникот е превиткуван по линиите на квадратната мрежа до добивање на 1×1 квадрат и овој квадрат е расечен по отсечка, која ги поврзува средините на две негови соседни страни. Колку делови може да се добијат на овој начин?

Решение. Ако листот се рашири, тогаш секое квадратче од мрежата ќе биде расечено по отсечка која поврзува средини на две негови соседни страни. По расекувањето на едно квадратче се определуваат расекувањата на преостанатите квадратчиња.

Лесно се гледа, дека за правоаголник $2n\times 2m$ се добиваат

$$(n+1)(m+1)+1,\ n(m+1)+1,\ (n+1)m+1 \text{ или } nm+1$$

делови. Во случајов $n=10, m=5$, па затоа имаме соодветно се добиваат 67, 56, 61 и 51 делови.

13. Квадрат 31×31 е поделен на квадрати 3×3 и 5×5, како и на $n\geq 0$ квадрати со помали димензии. Определи ја најмалата можна вредност

на n и видовите квадрати со помали димензии.

Решение. Да ги нумерираме редовите на квадратот и да запишеме -2 во полињата од 3, 6, 9, ..., 30 ред и 1 во преостанатите полиња. Збирот на сите запишани броеви е 31, збирот на броевите запишани во квадратите 3×3 и 5×5 е делив со 5, збирот на броевите во квадратите 2×2 е 4 или -2, а во квадратите 1×1 е бројот 1 или бројот -2. Според тоа, збирот на броевите кои ги покриваат квадратите од видот 3×3 и 5×5 е делив со 5, т.е. е од видот $5A$, па затоа збирот на броевите кои ги покриваат преостанатите квадрати е еднаков $31-5A$. Последното значи дека $n\geq1$ и лесно се гледа дека покривање може да има само кога имаме $n=1$ квадрат со димензии 1×1. Навистина, ако го поставиме квадратот 1×1 во центарот на квадратот 31×31, тогаш преостанатиот дел од правоаголникот го делиме на 4 правоаголници со димензии 15×16, а потоа секој од нив го делиме на два правоаголника 15×3 и два правоаголника 15×5, кои потоа лесно ги делиме на квадрати 3×3 и 5×5.

14. Квадратна табла 9×9 е шаховски обоена, при што аголните полиња се црни. На колку различни начини може да се постават 4 топа кои ќе ги напаѓаат сите бели полиња?

    Решение. Редовите и колоните на таблата да ги нумерираме со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. На таблата има $(81-1):2=40$ бели полиња. Еден топ може да напаќа најмногу 10 бели полиња, при што напаѓа точно 10 бели полиња само ако се наоѓа во парен ред и колона. Затоа за топовите треба да избереме различни парни колони од редовите 2, 4, 6 и 8, што може да се направи на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начини.

15. Квадратна табла $(2n+1)\times(2n+1)$ е шаховски обоена. Редовите и колоните се означено со броевите од 1 до $2n+1$ и полето (1,1) е црно. На колку начини може да се постават n топови кои ќе ги напаѓаат сите бели полиња?

    Решение. Имаме $((2n+1)^2-1):2=2n^2+2n$ бели полиња. Еден топ не може да напаѓа повеќе од $2n+2$ бели полиња, при што топот напаѓа точно $2n+2$ бели полиња ако и само ако се наоѓа во парен ред и парна колона. Значи, треба да избереме различни парни колон за тповите од редовите 2, 4, 6, ..., $2n$, за што има $n!$ начини.

16. Квадратна табла 8×8 е шаховски обоена. На колку различни начини може да се постават 4 топа кои ќе ги напаѓаат сите бели полиња?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека полето (1,1) е бело. На таблата има $64:2=32$ бели полиња. Еден топ може да напаѓа најмногу 8 бели полиња, при што топ напаѓа точно 8 бели полиња ако и само ако се наоѓа во црно поле. Бидејќи имаме 4 топа, секој топ напаѓа најмногу по 8 бели полиња и имаме 32 полиња, заклучуваме дека сите бели полиња ќе бидат нападнати ако и само ако секое бело поле е нападнато точно од еден топ. Сега, ако има топ Т1 на парен ред (и непарна колона) и топ Т2 на непарен ред, тогаш белото поле од редот на Т2 и колоната на Т1 ќе биде нападнато и од двата топа, што не е можно. Според тоа, броевите на редовите на сите четири топа имаат еднаква парност. Ако се парни, тогаш за секој топ треба да се изберат различни непарни колони, што е можно на $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ начини. Ако се непарни, аналогно има $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ начини. Според тоа, вкупниот број распореди е еднаков на $2\cdot 24=48$.

17. Квадратна табла 8×8 е поделена на 64 единечни квадратчиња со страна 1. Секое квадратче може да биде обоено црно или бело. Определи го бројот на боењата на таблата така што секој 2×2 квадрат има 2 бели и 2 црни квадратчиња.

Решение. Има 2^8 начини да се обои првата колона на таблата. Ако има две еднобојни квадратчиња едно до друго, тогаш еднозначно можеме да ја обоиме втората колона на таблата и аналогно да ги обоиме преостанатите колони. Значи, за такво боење на првата колона имаме еднозначно боење на таблата. Ако нема две еднобојни квадратчиња едно до друго, тогаш се менуваат бело со црно квадратче, за што има две можни боења на првата колона. Понатаму, во секоја колона исто така треба да се менуваат бело и црно квадратче, па затоа за такво боење на првата колона имаме 2^7 боења на таблата. Конечно, вкупно имаме

$$(2^8-2)\cdot 1+2\cdot 2^7=2\cdot 2^8-2=2^9-2=512$$

боења со саканото својство.

18. Квадрат со страна n е поделен на квадратчиња со страна 1. Определи го бројот на квадратите чии темиња се во темињата на делбените квадратчиња. Одговорот да се запише како полином од n.

Решение. Секој од бараните квадрати K може да се смести во единствен квадрат M, чии страни се паралелни со страните на најголемиот квадрат и минуваат низ темињата на K. Ако M има страна 1 (постојат n^2 такви квадрати), тогаш во него има 1 можен K, што дава $1\cdot n^2$ барани квадрати. Ако M има страна 2 (постојат $(n-1)^2$ такви квадрати), тогаш во него има 2 можни K, што дава $2(n-1)^2$ барани квадрати. Ако M има страна 3 (постојат $(n-2)^2$ такви квадрати), тогаш во него има 3 можни K, што дава $3(n-2)^2$ барани квадрати, итн. ако M има страна n (постои 1^2 таков квадрат), тогаш во него има n можни K. Според тоа, бараниот број квадрати е еднаков на

$$S(n)=1\cdot n^2+2\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-2)^2+...+n\cdot 1^2.$$

Збирот $S(n)$ всушност е еднаков на бројот на начините на кои во една зграда со $n+2$ ката може да се населат Горјан, Пабло, Андреј и Филип така што Горјан ќе живее на понизок кат од Пабло, но на повисок кат од Андреј и Филип. Навистина,

- ако Горјан е на 2-ри кат (пониско не може), тогаш Пабло има n избори на кат, а за Андреј и Филип имаат 1^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 3-ти кат, тогаш Пабло има $n-1$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 2^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 4-ти кат, тогаш Пабло има $n-2$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 3^2 избори на кат, итн.
- ако Горјан е на $(n+1)-$ви кат, тогаш Пабло има 1 избор на кат, а за Андреј и Филип има n^2 избори на кат,

Понатаму, Горјан, Пабло, Андреј и Филип може да живеат на три ката или на четири ката. Ако живеат на три ката, тогаш имаме $\binom{n+2}{3}$ можности, а ако живеат на 4 ката, тогаш изборот на катовите може да се направи на $\binom{n+2}{4}$ начини и за секој избор на кат имаме два можни распореди определени со тоа дали Андреј е на погорниот кат или Филип е на погорниот кат. Според тоа,

$$S(n)=\binom{n+2}{3}+2\binom{n+2}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3\cdot 2}+2\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4\cdot 3\cdot 2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{12}(2+n-1)=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

19. Квадрат со страна n е поделен на единечни квадратчиња. Да се определи збирот на плоштините на сите квадрати чии темиња се во темињата на делбените квадрачиња, а страните им се паралелни на страните на големиот квадрат. Одговорот да се запише како полином од n.

Решение. Имаме, n^2 квадрати со плоштина 1^2, $(n-1)^2$ квадрати со плоштина 2^2, $(n-2)^2$ квадрати со плоштина 3^2, итн. 1^2 квадрати со плоштина n^2. Според тоа, бараниот збир е

$$A(n)=1^2\cdot n^2+2^2\cdot(n-1)^2+3^2\cdot(n-2)^2+...+n^2\cdot 1^2.$$

Збирот $A(n)$ всушност е еднаков на бројот на начините на кои во една зграда со $n+2$ ката може да се населат Горјан, Пабло, Андреј, Филип и Матеј така што Горјан ќе живее на понизок кат од Пабло и Матеј, но на повисок кат од Андреј и Филип. Навистина,

- ако Горјан е на 2-ри кат (пониско не може), тогаш за Пабло и Матеј има n^2 избори на кат, а за Андреј и Филип има 1^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 3-ти кат, тогаш за Пабло и Матеј има $(n-1)^2$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 2^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 4-ти кат, тогаш за Пабло и Матеј има $(n-2)^2$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 3^2 избори на кат, итн.
- ако Горјан е на $(n+1)-$ви кат, тогаш за Пабло и Матеј има 1^2 избор на кат, а за Андреј и Филип има n^2 избори на кат,

Понатаму, Горјан, Пабло, Андреј, Филип и Матеј може да живеат на три ката или на четири ката или на пет ката. Ако живеат на три ката, тогаш имаме $\binom{n+2}{3}$ можности, при што Горјан живее на средниот кат, Пабло и Матеј на катот на него, а Андреј и Филип на катот под него. Ако живеат на 4 ката, тогаш изборот на катовите може да се направи на $\binom{n+2}{4}$ начини и за секој избор на катовите имаме 4 можни распореди определени со тоа дали Пабло и Матеј живеат на различни катови (2 распореди) или Андреј и Филип живеат на различни катови (2 распореди). Ако живеат на 5 ката, тогаш изборот на катовите може да се направи на $\binom{n+2}{5}$ начини и за секој начин имаме по 4 можни распореди (2 за Пабло и Матеј, 2 за Андреј и Филип). Според тоа,

$$\begin{aligned}A(n) &= \binom{n+2}{3} + 4\binom{n+2}{4} + 4\binom{n+2}{5}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3\cdot 2} + 4\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4\cdot 3\cdot 2} + 4\cdot\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{30}(5+5(n-1)+(n-2)(n-1))\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30}.\end{aligned}$$

20. Квадрат со страна n е поделен на единечни квадратчиња. Збирот на плоштините на сите квадрати чии темиња се во темињата на делбените квадрачиња, а страните им се паралелни на страните на големиот квадрат е $A(n)$. Колку од броевите $A(1), A(2), ..., A(99)$ се парни.

Решение. Според претходната задача имаме

$$A(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30}.$$

Ако n е парен број или ако дава остаток 3 при делење со 4, тогаш броителот на $A(n)$ е делив со 4, па затоа $A(n)$ е парен број. Ако n при делење со 4 дава остаток 1, тогаш броителот на $A(n)$ не е делив со 4, па затоа $A(n)$ е непарен број. Понатаму, меѓу броевите 1, 2, 3, ..., 99 има 25 кои даваат остаток 1 при делење со 4, што значи дека $99-25=74$ од броевите $A(1), A(2), ..., A(99)$ се парни.

21. Во секое поле на табла 5×5 е запишан бројот 0. Во еден чекор е дозволено да се избере произволно поле на таблата и да се зголемат за 1 сите броеви запишани во тоа поле и во сите нему соседни полиња (две полиња се соседни ако имаат заедничка страна). По конечно многу чекори во сите полиња на таблата е запишан бројот n. Определи ги сите можни вредности за n.

Решение. Сите 25 полиња на таблата да ги поделиме во подмножества A, B, C, D, E, F како што е прикажано на левиот цртеж долу. Нека a, b, c, d, e, f е вкупниот број потези кои се реализирани на полињата на соодветното подмножество. Јасно е дека секој потез на поле од множеството:

- A влијае точно на две полиња од множеството B,
- B влијае точно на едно поле од секое од множествата A, C, D,
- C влијае на точно две полиња од секое од множествата B, E,
- D влијае на точно две полиња од множеството B и едно поле од

множеството E,

- E влијае на точно две полиња од множеството C и по едно поле од множествата D и F,
- F влијае на четири полиња од множеството E.

A	**B**	**D**	**B**	**A**
B	**C**	**E**	**C**	**B**
D	**E**	**F**	**E**	**D**
B	**C**	**E**	**C**	**B**
A	**B**	**D**	**B**	**A**

3	**4**	**3**	**3**	**4**
4	**1**	**1**	**1**	**4**
3	**1**	**5**	**2**	**2**
3	**1**	**2**	**1**	**3**
4	**4**	**2**	**3**	**5**

Според тоа, важат следниве равенства кои го опишуваат вкупниот број промени на полињата во назначеното множество:

$$A:\ a+n=4n,\qquad D:\ d+b+e=4n,$$
$$B:\ b+2a+2c+2d=8n,\qquad E:\ e+2c+d+4f=4n,$$
$$C:\ c+b+2e=4n,\qquad F:\ f+e=n.$$

Решавајќи го овој систем равенки по непознати a,b,c,d,e,f, добиваме

$$a=\tfrac{16}{11}n,\ \ b=\tfrac{28}{11}n,\ \ c=\tfrac{4}{11}n,\ \ d=\tfrac{10}{11}n,\ \ e=\tfrac{6}{11}n,\ \ f=\tfrac{5}{11}n.$$

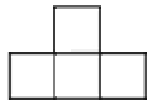
Но, $n\in\mathbb{N}$, па за да броевите a,b,c,d,e,f се природни потребно е $n=11k, k\in\mathbb{N}$. Овој услов е и доволен, што покажува распоредот на бројот на потезите на секое поле прикажан на горниот десен цртеж кога $k=1$ (за произволен број $k>1$ само бројот на потезите во десната табла се множи со k). Јасно, постојат и други можности да се постигне бројот $n=11k, k\in\mathbb{N}$.

Задачи за самостојна работа

1. Во полињата на табла 10×10 се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 100 и е пресметан збирот на броевите во секој ред. Се покажало дека збирот на броевите запишани во првиот ред е поголем од секој од преостанатите девет збира. Која е најмалата можна вредност на збирот на броевите запишани во првиот ред?

2. Во секое поле на табла со 4 реда и n колони е запишан по еден природен број. Збирот на броевите во секоја колона е еднаков на 20, а во секој ред броевите се различни. Определи ја најголемата можна вредност за n.

3. Во полињата на табла $n\times n$, $(n\geq 3)$ се запишани реални броеви, при што во секое $T-$ тетрамино (цртеж десно) независно од ориентацијата збирот на броевите е 4. Притоа не се сите броеви еднакви на 1. Определи го бројот n.



4. Во полињата на табла 2016×2016 се запишани броевите од 1 до 2016^2 во растечки редослед (секое поле содржи точно еден број), почнувајќи од горното лево поле и движејќи се по редовите одлево-надесно. Избрани се 2016 од овие броеви, така што од секој ред и секоја колона е избран точно по еден број. Определи ги сите можни вредности на збирот на избраните броеви.

5. Од квадрат 52×52 по линиите на делбените единечни квадратчиња се исечни 99 квадрати 3×3. Докажи дека може да се исече уште еден 3×3 квадрат.

6. На шаховска $n\times n$ табла се поставени $n-2$ жетони и t шаховски топови, така што никои два топа меѓусебно не се напаѓаат (ако меѓу два топа има жетон, тие два топа не се напаѓаат). Определи ја најголемата можна вредност на t.