## Сојузен натпревар 1984

### Седмо одделение

1. Докажи дека остатокот при делење на било кој прост број со 30 е исто така прост број или 1.
**Решение.** Нека $p$ прост број и $p=30k+r$. При делење на било кој природен број со 30 можни остатоци се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 27, 28 и 29. Но, $p$ е прост, па добиениот остаток $r$ не може да биде 0 или број делив со 2, 3 и 5, бидејќи во спротивно $p$ ќе биде сложен број. Значи, можни остатоци 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29, што и требаше да се докаже.

2. Не едно тестирање учествувале 25 ученици од осум училишта. Тие точно решиле вкупно 50 задачи. Секој ученик од исто училиште точно решил еднаков број задачи, а учениците од различни училишта точно решиле различен број задачи. Секој ученик точно решил најмалку една задача. Колку ученици точно решиле само по една задача?
**Решение.** Од секое училиште да земеме по еден ученик и претпоставиме дека првиот решил 1 задача, вториот решил 2 задачи, третиот 3 итн. осмиот решил 8 задачи. Во овој случај овие 8 ученици решиле вкупно $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ задачи. Значи, од нашите 22 ученика останаат 14 и тие вкупно решиле $50-36=14$ задачи. Според тоа, секој од овие 14 ученици решил по 1 задача. Конечно, 1 задача решиле 15 ученици.

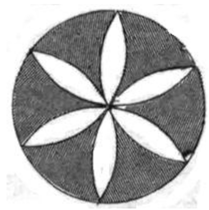
3. „Сашо и јас, рече Дарко, можеме да завршиме една работа за 20 дена, но ако со мене работи Никола наместо Сашо, тогаш работата ќе биде завршена за 15 дена.“
„Имам подобра комбинација, рече Никола, ако го земам Сашо за помошник, тогаш работата ќе ја завршиме за 12 дена.“
За коку дена секој од низ самостојно ќе ја заврши работата?
**Решение.** Да претпоставиме дека на Сашо му требаат $s$ денови, на Дарко $d$ денови и на Никола $n$ денови за сам да ја заврши работата. Сметајќи кој колку работа завршува за еден ден го добиваме системот равенки
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{s}=\frac{1}{20},\ \frac{1}{d}+\frac{1}{n}=\frac{1}{15},\frac{1}{n}+\frac{1}{s}=\frac{1}{12}.$$

Со собирање на овие равенки добиваме

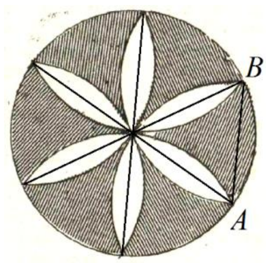
$$\frac{2}{d}+\frac{2}{n}+\frac{2}{s}=\frac{12}{60}, \text{ т.е. } \frac{1}{d}+\frac{1}{n}+\frac{1}{s}=\frac{1}{10}.$$

Сега, ако од последната равенка, една по друга ја одземеме секоја од равенките на системот добиваме $\frac{1}{n}=\frac{1}{20}, \frac{1}{s}=\frac{1}{30}, \frac{1}{d}=\frac{1}{60}$. Значи, ако сам работи Сашо работата ќе ја заврши за 30 дена, Дарко за 60 дена, а Никола за 20 дена.

4. Колку проценти од плоштината на кругот зафаќа осенчениот дел на цртежот десно?



**Решение.** Неосенчениот дел со дијаметри е поделен на 12 еднакви делови, секој од кои е еднаков на отсечокот од кругот над тетивата $AB$. Плоштината на овој отсечок е еднаква на




$$P_0=\frac{1}{6}\pi r^2-\frac{r^2\sqrt{3}}{4},$$

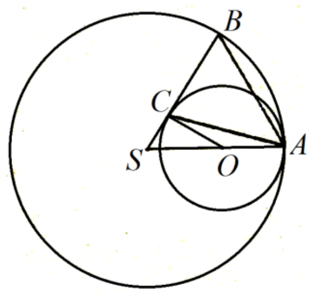
каде $r$ е радиусот на кругот. Според тоа, плоштината на осенчениот дел од кругот е еднаква на

$$P=\pi r^2-12(\frac{1}{6}\pi r^2-\frac{r^2\sqrt{3}}{4})=r^2(3\sqrt{3}-\pi).$$

Овој дел е $\frac{r^2(3\sqrt{3}-\pi)}{r^2\pi}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{\pi}\approx 0,654=65,4\%$ од плоштината на кругот.

5. Две кружници се допираат внатрешно во точката $A$. Од центарот на поголемата кружница $O$ повлечен е радиус $OB$ на поголемата кружница, кој воедно е и тангента на помалата кружница во точката $C$. Определи го $\measuredangle BAC$.

**Решение.** Нека $\theta=\measuredangle BAC$ е бараниот агол и нека $\measuredangle SAC=\alpha$ и $\measuredangle SBC=\beta$. По претпоставка триаголниците $SAB$ и $ACO$ се рамнокраки ($SA=SB$ и $OA=OC$), а триаголникот $SOC$ е правоаголен. Нека $\measuredangle ASB=\varphi$. Тогаш од триаголникот $ABS$ имаме $2\beta+\varphi=180^\circ$, т.е. $\beta=90^\circ-\frac{\varphi}{2}$. Понатаму, $\measuredangle SOC$ е надворешен за триаголникот $ACO$, па затоа



$$\measuredangle SOC = \measuredangle OAC = \measuredangle OCA = 2\alpha .$$

Потоа, од триаголникот $SOC$ имаме $\varphi + 2\alpha = 90^\circ$, т.е. $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Конечно,

$$\theta = \measuredangle SAB - \alpha = \beta - \alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} - (45^\circ - \frac{\varphi}{2}) = 45^\circ .$$

## Осмо одделение

1. Ако на квадратот на произволен природен број се додаде бројот 101010, тогаш добиениот збир не може да биде квадрат на природен број. Докажи!

   **Решение.** Нека претпоставиме дека $n^2 + 101010 = k^2$. Тогаш

   $$k^2 - n^2 = 101010\text{, т.е. } (k-n)(k+n) = 2 \cdot 50505.$$

   Ако броевите $k$ и $n$ се парни, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4. Слично, ако $k$ и $n$ се непарни, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4. Конечно, ако еден од броевите $k$ и $n$ е парен, а другиот е непарен тогаш десната страна е делива со 2, а левата не е делива со 2. Значи, во секој случај имаме противречност, од што следува тврдењето на задачата.

2. Дадена е дропката $A = \frac{2x-14}{x-4}$, каде $x$ е цел број различен од 4.

   а) За кои вредности на бројот $x$ дропка $A$ е цел број?
   б) За кои вредности на природниот број $x$ ($x > 4$) дропката $A$ има најмала вредност?

   **Решение.** а) Имаме $A = \frac{2x-14}{x-4} = \frac{2(x-4)-6}{x-4} = 2 - \frac{6}{x-4}$. Овој израз може да е цел број ако и само ако 6 е делив со $x-4$, а тоа е можмо ако и само ако $x-4 = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, т.е. $x \in \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$.

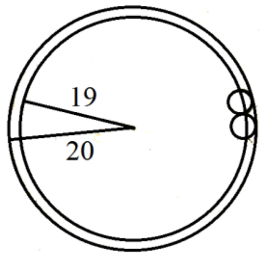
   б) Дропката $A$ ќе има најмала вредност ако дропката $\frac{6}{x-4}$ има најголема вредност, а тоа е исполнето за $x - 4 = 1$, т.е. $x = 5$.

3. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се еднакви на двократниот производ на своите цифри.

   **Решение.** Нека $\overline{xy}$ е бараниот број. Тогаш $10x + y = 2xy$, од каде добиваме $y = 2x(y-5)$. Јасно, $x, y \neq 0$ и бидејќи $y$ е цифра, важи $y > 0$, па затоа мора да е $y>5$. Од последното равенство следува дека $y$ е парен број, па затоа $y=6$ или $y=8$. За $y=6$ добиваме $x=3$, а за $y=8$ добиваме $8=6x$ и оваа равенка нема решение во множеството природни броеви. Конечно, бараниот број е 36.

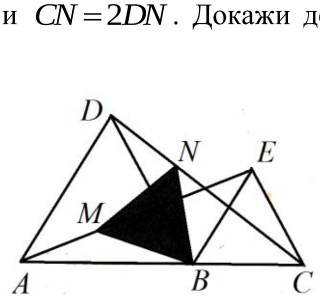
4. Докажи дека во круг со радиус $r=19$ не може да се распоредат 400 точки кои по парови се на растојание поголемо од 2.

**Решение.** Ако растојанието меѓу било кои две точки е поголемо од 2, тогаш околу секоја точка може да се опише кружница со радиус 1, така што опишаните кружници не се допираат. Во дадениот круг точките може да се распоредат и на самата кружница, па за да ги покриеме сите кружници со радиус 1, опишани околу точките, ќе опишеме круг со радиус 20, концентричен на дадениот круг (цртеж десно). Сега, ако може да се распоред 400 точки, тогаш плочтината на поголемиот круг мора да е поголема од збирот на плоштините на сите 400 кругови со радиус 1. Но, плоштината на најголемиот круг е $P=\pi\cdot 20^2=400\pi$, а збирот на плоштините на сите 400 мали кругови е $400P_1=400\pi\cdot 1^2=400\pi$. Значи, не важи $P>400P_1$, па затоа во дадениот круг не може да се распоредат 400 точки на саканиот начин.




5. Дадени се редоследно точките $A,B,C$ на правата $p$ и точките $D$ и $E$ од иста страна надвор од правата $p$, такви што триаголниците $ABD$ и $BCD$ се рамнострани. Нека $M$ е точка од отсечката $AE$ и $N$ е точка од отсечката $CD$, така што $ME=2AM$ и $CN=2DN$. Докажи дека триаголникот $BMN$ е рамностран.

**Решение.** Од $\measuredangle ABE=\measuredangle DBC$, $AB=BD$ и $BE=BC$ следува дека триаголниците $ABE$ и $DBC$ се складни. Од оваа складност следува $AE=CD$, а оттука и $AM=DN$ (како третина од еднакви отсечки), а потоа и $\measuredangle BAE=\measuredangle BDN$. Од ова следува дека триаголниците $ABM$ и $BDN$ се складни, па затоа $BM=BN$ и $\measuredangle ABM=\measuredangle DBN$.



Понатаму,

$$\measuredangle MBN = \measuredangle MBD + \measuredangle DBN = \measuredangle MBD + \measuredangle ABM = \measuredangle ABD = 60^\circ .$$

Според тоа, во рамнокракиот триаголник $MBN$ аголот при врвот е еднаков на $60^\circ$, што значи дека овој триаголник ме рамностран.